Популярные лекции
ПО МАТЕМАТИКЕ

Л. А. СКОРНЯКОВ

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Книги
АН
Никитина

АН
КНИГИ
НИКИТИНА

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ
ПО МАТЕМАТИКЕ
ВЫПУСК 59

Л. А. СКОРНЯКОВ

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1986

ББК 22.143
С44
УДК 512(023)

Скорняков Л. А.

С44 Системы линейных уравнений. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. — 64 с. — (Популярные лекции по математике.)

10 коп. 100 000 экз.

В брошюре содержится исчерпывающее изложение учения о системах линейных уравнений, опирающееся лишь на элементарные преобразования матриц.

Для широкого круга читателей, включая школьников старших классов, интересующихся математикой.

С $\frac{1702030000-027}{053(02)-86}$ 43-86

ББК 22.143

Рецензент
кандидат физико-математических наук *Д. В. Беклемишев*

© Издательство «Наука».
Главная редакция
физико-математической литературы,
1986

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие 4
§ 1. Системы линейных уравнений и их решения 5
§ 2. Матрицы и их элемеитарные преобразования 9
§ 3. Метод решения систем линейных уравиений 20
§ 4. Ранг матрицы 28
§ 5. Теорема о главных неизвестных 36
§ 6. Фуидаментальные системы решений 44
Ответы 53
Решения 57
Предметный указатель 62

ПРЕДИСЛОВИЕ

Содержание настоящей книги достаточно четко охарактеризовано в аннотации. Добавим еще, что формально в ней не используется метод полной математической индукции. Однако в некоторых случаях он скрывается под словами «и т. д.». Читатель, знакомый с этим методом, без труда доведет изложение до современного уровня строгости. Основная цель приводимых упражнений — дать читателю возможность проверить уровень усвоения изучаемого им материала. Для более глубокого знакомства с предметом годится любой курс линейной алгебры. Автору, разумеется, кажется наилучшим его учебное пособие «Элементы алгебры» (М.: Наука, 1980), но это, конечно, субъективно.

Идея, положенная в основу предлагаемой книги, использовалась при преподавании на отделении структурной лингвистики филологического факультета Московского университета. Автор глубоко благодарен Ю. А. Бахтурину, обратившему его внимание на эту идею. Ю. А. Бахтурин, Д. В. Беклемишев, Д. П. Егорова и А. П. Мишина высказали ряд полезных замечаний по тексту рукописи. Автор с удовольствием пользуется случаем, чтобы поблагодарить этих математиков. С благодарностью он отмечает большую помощь, оказанную Т. А. Гуровой при подготовке рукописи.

§ 1. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ РЕШЕНИЯ

Линейным уравнением от n неизвестных называется уравнение вида

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b, \tag{1.1}$$

где a_1, a_2, ..., a_n, b — данные действительные числа. Например,

$$2x_1 + x_2 = 3, \tag{1.2}$$

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0 \tag{1.3}$$

и

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 40 \tag{1.4}$$

— уравнения от двух, трех и четырех неизвестных соответственно. Числа a_1, a_2, ..., a_n называются *коэффициентами* уравнения (1.1), а число b — его *свободным членом*. Что является решением линейного уравнения? Чтобы ответить на этот вопрос, введем в рассмотрение строку длины n*)

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \tag{1.5}$$

где α_1, ..., α_n — действительные числа. Подчеркнем, что понятие строки является неопределяемым. Конечно, можно сказать, что строка — это последовательность, состоящая из n действительных чисел. Но тогда уместно спросить: что такое последовательность? Строка (1.5) называется *решением* уравнения (1.1), если

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_n\alpha_n = b.$$

Так, решением уравнения (1.2) служат строки (1, 1), (0, 3), (2, —1). Можно указать и другие решения. Среди решений уравнения (1.3) назовем строки (1, 1, 2), (1, 0, 1), (0, 0, 0), среди решений уравнения (1.4) —

*) Часто вместо «строка» говорят «вектор».

строки (10, 10, 10, 10), (40, 0, 0, 0), (70, —10, —10, —10). Для уравнения

$$0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = 0$$

решением служит любая строка длины n, а уравнение

$$0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = 1$$

вообще не имеет решений. Таким образом, линейное уравнение может обладать большим количеством решений. Решить такое уравнение — это значит каким-либо способом описать это множество решений. Для уравнения (1.2) можно предложить следующее описание: решениями уравнения (1.2) служат всевозможные строки вида $(\alpha, 3-2\alpha)$, где α — произвольное действительное число. Множество решений уравнения (1.3) состоит из всех строк вида $(\alpha, \beta, \alpha+\beta)$, где α и β — произвольные действительные числа. Решениями уравнения (1.1) при $a_1 \neq 0$ служат строки

$$\left(\frac{b - a_2\alpha_2 - \ldots - a_n\alpha_n}{a_1},\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n\right),$$

где $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — произвольные действительные числа. Подобное описание можно получить и в случае, когда отличен от 0 какой-нибудь другой коэффициент этого уравнения. Если же все коэффициенты равны нулю, то при $b = 0$ решением служит любая строка длины n, а при $b \neq 0$ решений нет.

В качестве задачи, решаемой с помощью уравнения (1.4), рассмотрим следующую. В бассейн объемом 40 м^3 проведено 4 трубы. Сколько воды надо пропустить через каждую из них, чтобы заполнить бассейн? Приведенные выше решения уравнения (1.4) можно трактовать так: первое — через каждую трубу следует влить по 10 м^3, второе — через первую трубу влить 40 м^3 и не пользоваться остальными, третье — через первую трубу влить 70 м^3, а через каждую из остальных вылить по 10 м^3. Нетрудно понять, что через любые три трубы можно влить или вылить произвольное количество воды. Однако если это сделано, то количество воды, выливаемой или вливаемой через четвертую трубу, определяется однозначно.

Усложним только что рассмотренную задачу с бассейном, потребовав, чтобы количество воды, поступающей через третью трубу, совпадало с количеством воды, поступающей через все остальные трубы, вместе взятые,

Тогда объемы воды, проходящей через каждую из труб, должны наряду с уравнением (1.4) удовлетворять уравнению

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0.$$

В этом случае говорят, что искомая строка должна удовлетворять системе из двух линейных уравнений:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 40, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 0. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим $2x_3 = 40$, откуда $x_3 = 20$. Следовательно, в любом случае через третью трубу должно быть влито 20 м^3 воды. Действие же остальных труб определяется уравнением

$$x_1 + x_2 + x_4 = 20,$$

из которого видно, что режим работы любых двух из оставшихся труб может быть задан произвольно. Если же он задан, то объем воды, проходящей через последнюю трубу, определяется однозначно.

В общем случае мы имеем дело с системой m уравнений от n неизвестных:

$$\begin{aligned} a_{1\,1}x_1 + a_{1\,2}x_2 + \ldots + a_{1\,n}x_n &= b_1, \\ a_{2\,1}x_1 + a_{2\,2}x_2 + \ldots + a_{2\,n}x_n &= b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m\,1}x_1 + a_{m\,2}x_2 + \ldots + a_{m\,n}x_n &= b_m. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Строка $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ называется *решением* этой системы, если она является решением каждого из входящих в него уравнений. В частности, множеству решений системы (1.6) принадлежат строки (5, 5, 20, 10), (—15, 10, 20, 25) и другие.

Обратим внимание на систему обозначений, принятую в записи системы (1.7). Например, индексы коэффициента $a_{1\,2}$ указывают, что мы имеем дело со вторым коэффициентом первого уравнения. Поэтому следует говорить «a один два», а не «a двенадцать».

Уже на примере системы (1.6) было видно, что неизвестные далеко не равноправны. Значение одних может определяться системой линейных уравнений, другие могут задаваться произвольно, третьи определяются однозначно, когда выбор значений произвольно задаваемых неизвестных осуществлен. Задача настоящей книги — научить читателя проводить соответствующий анализ.

Две системы линейных уравнений называются *эквивалентными*, если всякое решение первой системы является решением второй системы и наоборот. Ясно, что вместо данной системы можно решать любую, ей эквивалентную.

Например, система (1.6) эквивалентна системе

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 40, \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 + 0x_4 &= 20. \end{aligned} \tag{1.8}$$

В самом деле, если $\bar{u} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ — решение системы (1.6), то эта строка служит решением первого уравнения этой системы, а значит, и первого уравнения системы (1.8). Кроме того, как уже отмечалось, должно быть $\alpha_3 = 20$, и, следовательно, строка $\bar{u}$ является решением и второго уравнения системы (1.8). Таким образом, всякое решение системы (1.6) служит решением системы (1.8). Наоборот, допустим, что $\bar{v} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$ — решение системы (1.8). Как и раньше, сразу видим, что $\bar{v}$ является решением первого уравнения системы (1.6). Кроме того, $\beta_3 = 20$ и $\beta_1 + \beta_2 + 20 + \beta_4 = 40$. Отсюда $\beta_1 + \beta_2 + \beta_4 = 20$ и, следовательно, $\beta_1 + \beta_2 - \beta_3 + \beta_4 = \beta_1 + \beta_2 - 20 + \beta_4 = 40 - 20 = 20$. Таким образом, $\bar{v}$ служит решением второго уравнения системы (1.6), а значит, и решением всей этой системы.

Теорема 1.1. *Если к системе линейных уравнений от n неизвестных присоединить уравнение*

$$0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = 0,$$

то возникает система, эквивалентная исходной.

Доказательство. Поскольку каждое уравнение старой системы является уравнением новой, то каждое решение новой системы служит решением старой. Если же строка $\bar{u}$ является решением старой системы, то она является, конечно, решением всех уравнений новой системы, кроме, быть может, присоединенного. Но $\bar{u}$ служит решением и этого уравнения, ибо, как уже отмечалось, его решением служит любая строка длины n. Таким образом, всякое решение старой системы является решением новой, чем и завершается доказательство.

Упражнения

1. Составить системы линейных уравнений для решения следующих задач:

а) Каковы стороны четырехугольника, если сумма их длин равна 40 м, а сумма длин трех первых сторон на 20 м больше, чем длина четвертой стороны?

б) Какими способами можно заплатить 2 рубля 20 монетами достоинством в 5, 10, 15 и 20 копеек?

в) Какими могут быть четыре числа, сумма любых трех из которых равна 1?

г) Какими могут быть четыре числа, сумма любых двух из которых равна 1?

д) На стройке имеется четыре бетономешалки с производительностью 20, 12, 15 и 10 тонн бетона в час. Требуется в течение трех дней ежедневно выпускать по 120 тонн бетона с соблюдением следующих условий: 1) наименее производительная бетономешалка работает ежедневно, а каждая из остальных по два дня; 2) одновременно работают три бетономешалки; 3) число рабочих часов каждой бетономешалки одно и то же для всех рабочих дней. Сколько часов должна работать каждая из бетономешалок?

е) Какой может быть последовательность из n чисел, если сумма двух соседних членов этой последовательности равна нулю и то же самое верно для первого и последнего членов?

2. Если к системе (1.7) добавить уравнение

$$(a_{1\,1}+a_{2\,1})\,x_1+(a_{1\,2}+a_{2\,2})\,x_2+\ldots+(a_{1\,n}+a_{2\,n})\,x_n=b_1+b_2,$$

то получится система, эквивалентная исходной. Доказать.

§ 2. МАТРИЦЫ И ИХ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Аппаратом, позволяющим решить поставленную в предыдущем параграфе задачу, являются матрицы, возникающие, как мы увидим, из строк длины n. Напомним, что понятие строки длины n действительных чисел является неопределяемым. Если дана строка $\bar{a}=(a_1, \ldots, a_n)$, то числа a_i называются ее *координатами* или *компонентами*. Строки $(a_1, \ldots, a_m)$ и $(b_1, \ldots, b_n)$ считаются *равными*, если $m=n$ и $a_i=b_i$ для всех i. Строка, состоящая из одних нулей, называется *нулевой* и обозначается через $\bar{0}$. *Лидером* строки называется ее первая ненулевая координата. Например, лидеры строк (0, 1, 0, 0, 0), (1, 0, 1) и (0, 0, 0, 0, 1) расположены на втором, первом и пятом местах соответственно. Понятно, что нулевая строка лидера не имеет. Две строки одной и той же длины можно складывать. *Сумма* двух строк определяется следующим правилом:

$$(a_1, \ldots, a_n)+(b_1, \ldots, b_n)=(a_1+b_1, \ldots, a_n+b_n).$$

Подчеркнем, что символ $+$ в левой и правой частях этого равенства имеет различный смысл. Слева он обозначает сумму строк, а справа — сумму действительных чисел. Например,

$$(1, 2, 3, -1)+(2, 1, 0, 1)=(3, 3, 3, 0).$$

Если $\bar{a}$ — произвольная строка длины n, а $\bar{0}$ — нулевая строка длины n, то, как легко подсчитать,

$$\bar{a}+\bar{0}=\bar{a} \text{ и } \bar{0}+\bar{a}=\bar{a}.$$

Теорема 2.1. *Если $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ — произвольные строки длины n, то*

$$\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a}$$

и

$$(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}=\bar{a}+(\bar{b}+\bar{c}).$$

Доказательство. Пусть

$$\bar{a}=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

и

$$\bar{b}=(\beta_1, \ldots, \beta_n).$$

Тогда

$$\bar{a}+\bar{b}=(\alpha_1+\beta_1, \ldots, \alpha_n+\beta_n)$$

и

$$\bar{b}+\bar{a}=(\beta_1+\alpha_1, \ldots, \beta_n+\alpha_n).$$

Поскольку для сложения действительных чисел коммутативный закон справедлив, то

$$\alpha_1+\beta_1=\beta_1+\alpha_1,\ \alpha_2+\beta_2=\beta_2+\alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n+\beta_n=$$
$$=\beta_n+\alpha_n.$$

Таким образом, строки $\bar{a}+\bar{b}$ и $\bar{b}+\bar{a}$ имеют одну и ту же длину и для каждого i одну и ту же i-ю координату. По определению равенства строк $\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a}$, что и требовалось.

Для доказательства второго равенства положим $\bar{c}=(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ и заметим, что i-ми координатами строк, стоящих в левой и правой частях нашего равенства, служат числа $(\alpha_i+\beta_i)+\gamma_i$ и $\alpha_i+(\beta_i+\gamma_i)$. Принимая во внимание справедливость ассоциативного закона для действительных чисел, как и выше, придем к нужному равенству.

Заметим, что не все операции, встречающиеся в математике, коммутативны. Рассмотрим, например, множество слов, записанных с помощью букв русского алфавита. При этом под словом будем понимать любую конечную последовательность этих букв: например, *прк*, *мама*, *наотум* — слова. Определим операцию сложения следующим правилом:

$$x_1 \ldots x_m+y_1 \ldots y_n=x_1 \ldots x_m y_1 \ldots y_n$$

(здесь как x_i, так и y_i — не обязательно различные буквы). Ясно, что, например, *м* + (*ама*) = *мама* $\neq$ *амам* = (*ама*) + *м*. Следовательно, существуют такие слова u и v, что $u+v \neq v+u$. Однако

можно доказать, что равенство $(u+v)+w=u+(v+w)$ справедливо для любых слов u, v и w (попробуйте!). Другой пример некоммутативной операции — операция возведения в степень на множестве натуральных чисел, ибо $2^3 \neq 3^2$.

Благодаря теореме 2.1, складывая строки, мы можем действовать так же, как мы привыкли действовать при сложении чисел, т. е. не обращать внимания на порядок слагаемых, а при наличии нескольких слагаемых расставлять скобки произвольным образом. Подчеркнем, что как для чисел, так и для строк запись

$$\bar{a}_1+\bar{a}_2+\ldots+\bar{a}_m,$$

строго говоря, смысла не имеет, ибо мы можем вычислять лишь сумму двух чисел или строк. Вычисляя же «длинную» сумму, мы мысленно так или иначе расставляем скобки. Подробнее см. «Элементы алгебры», с. 36.

Кроме сложения, нам понадобится умножать строку на действительное число λ. Эта операция определяется следующим правилом:

$$\lambda(a_1, \ldots, a_n)=(\lambda a_1, \ldots, \lambda a_n).$$

Теорема 2.2. *Если* $\bar{a}$ и $\bar{b}$ — *строки длины* n, *а* λ — *действительное число, то*

$$\lambda(\bar{a}+\bar{b})=\lambda\bar{a}+\lambda\bar{b},$$
$$(\lambda+\mu)\bar{a}=\lambda\bar{a}+\mu\bar{a},$$
$$(\lambda\mu)\bar{a}=\lambda(\mu\bar{a})$$

и

$$1\bar{a}=\bar{a}.$$

Доказательство. Чтобы доказать, например, равенство $\lambda(\bar{a}+\bar{b})=\lambda\bar{a}+\lambda\bar{b}$, заметим, что i-ми координатами строк, стоящих в левой и правой частях этого равенства, являются $\lambda(a_i+b_i)$ и $\lambda a_i+\lambda b_i$ соответственно и их совпадение вытекает из справедливости закона дистрибутивности для действительных чисел.

Справедливость остальных равенств устанавливается аналогичными рассуждениями, которые, надеюсь, читатель сможет провести самостоятельно.

Таблицу, представляющую собой несколько строк длины n, записанных одна под другой, называют *матрицей*. Матрица

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

содержит m строк и n столбцов. Будем говорить также, что она имеет *размер* $m \times n$. Например, таблицы

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \text{ и } \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{Vmatrix}$$

являются матрицами размеров 3×4, 4×3 и 2×5 соответственно. Строка длины n является матрицей размера $1 \times n$, а столбец длины m можно рассматривать как матрицу размера $m \times 1$. Матрицу размера $n \times n$ называют *квадратной матрицей порядка n*. Матрица O, состоящая из нулевых строк, называется *нулевой*, а матрица

$$E = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix}$$

— *единичной*. Подчеркнем, что для каждого числа n существует своя единичная матрица порядка n, а для каждого размера $m \times n$ — своя нулевая матрица. Две матрицы считаются *равными*, если они имеют одинаковые размеры и их элементы, стоящие на соответствующих местах, совпадают.

В дальнейшем элементы матрицы, обозначенной некоторой большой буквой (скажем, A), будем, как правило, без специальных оговорок обозначать соответствующей малой буквой с индексами (в нашем случае a_{ij}), обозначающими номер строки и столбца соответственно.

Под преобразованием матрицы понимается переход от одной матрицы к другой, осуществленный по определенным правилам. Будем рассматривать следующие преобразования:

I. Перемена местами двух строк матрицы.

II. Прибавление к какой-либо строке матрицы другой ее строки, умноженной на некоторое число.

Эти преобразования называются *элементарными преобразованиями строк первого и второго типа* соответственно. Аналогично определяются *элементарные преобразования столбцов.*

Иногда оказывается полезным и элементарное преобразование третьего типа:

III. Умноженне некоторой строки на отличное от нуля число.

Например, от матрицы

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

прибавляя к третьей строке первую, умноженную на 2, перейдем к матрице

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & -2 & 0 \end{Vmatrix},$$

а при прибавлении ко второй строке этой матрицы первой строки, умноженной на —2, приходим к матрице

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & -2 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Теорема 2.3. *Если в матрице A элемент a_{ik} отличен от 0 и $i \neq j$, то в матрице B, полученной из A прибавлением к j-й строке i-й строки, умноженной на $-\frac{a_{jk}}{a_{ik}}$, элемент b_{jk} равен 0.*

Доказательство. Из определений сложения строк и умножения на число получаем (невыписанные координаты рассматриваемых строк нас не интересуют!)

$$(b_{j1}, \ldots, b_{jk}, \ldots, b_{jn}) =$$

$$= (a_{j1}, \ldots, a_{jk}, \ldots, a_{jn}) + \left(-\frac{a_{jk}}{a_{ik}}\right)(a_{i1}, \ldots, a_{ik}, \ldots, a_{in}) =$$

$$= (\ldots, a_{jk}, \ldots) + \left(\ldots, -\frac{a_{jk}}{a_{ik}} a_{ik}, \ldots\right) =$$

$$= (\ldots, a_{jk}, \ldots) + (\ldots, -a_{jk}, \ldots) = (\ldots, 0, \ldots).$$

В силу определения равенства строк отсюда вытекает, что $b_{jk} = 0$.

Теорема 2.4. *Если от матрицы A к матрице B можно перейти конечным числом элементарных преобразований строк, то и от B к A также можно перейти конечным числом элементарных преобразований строк.*

Доказательство. Предварительно будет установлена

Лемма. *Если от матрицы A к матрице B можно перейти с помощью одного элементарного преобразования,*

то и от B к A также можно перейти с помощью одного элементарного преобразования.

В самом деле, справедливость леммы очевидна, если для перехода от A к B использовано одно элементарное преобразование первого типа. Допустим, что от A к B перешли, используя одно элементарное преобразование второго типа, т. е. (i-я строка в B) = (i-я строка в A) + + λ(j-я строка в A), а каждая из остальных строк матрицы B совпадает с соответствующей строкой матрицы A. Таким образом, $b_{ik} = a_{ik} + \lambda a_{jk}$ для каждого номера k. Если теперь к i-й строке матрицы B прибавить ее j-ю строку, умноженную на $(-\lambda)$, то в получившейся после этого матрице на месте (i, k) окажется элемент

$$b_{ik} + (-\lambda)b_{jk} = (a_{ik} + \lambda a_{jk}) + (-\lambda a_{jk}) = a_{ik}.$$

Поскольку элементы получившейся матрицы, расположенные в строках, отличных от i-й, совпадают с соответствующими элементами матрицы A, то и вся она совпадает с A. Этим завершается доказательство леммы.

Возвращаясь к доказательству теоремы, допустим, что переход от A к B осуществлен с использованием t элементарных преобразований, где $t > 1$. Обозначим через $C_1, C_2, \ldots, C_{t-1}$ матрицы, последовательно возникающие при этих преобразованиях. Таким образом, с помощью одного элементарного преобразования можно перейти от A к C_1, от C_i к C_{i+1} при $i = 1, 2, \ldots, t-2$ и от C_{t-1} к B. Но тогда согласно лемме можно с помощью одного элементарного преобразования перейти от B к C_{t-1}, то C_{t-1} к C_{t-2} и т. д. В конце концов мы перейдем к матрице C_1, а от нее к A, что и завершает доказательство теоремы.

Назовем матрицу *ступенчатой*, если она обладает следующими свойствами.

(1) Если i-я строка нулевая, то $(i+1)$-я строка также нулевая.

(2) Если лидеры i-й и $(i+1)$-й строк располагаются в столбцах с номерами k_1 и k_{i+1} соответственно, то

$$k_i < k_{i+1}.$$

Наглядно эти свойства означают, что ниже нулевой строки могут располагаться лишь нулевые строки, а все элементы, располагающиеся влево и вниз от лидера какой-либо строки, являются нулями. Происхождение на-

звания нетрудно объяснить, рассматривая, например, ступенчатую матрицу

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

где $k_1 = 2$, $k_2 = 4$ и $k_3 = 5$.

Теорема 2.5. *Если A — ступенчатая матрица размера $m \times n$, а B получена из A приписыванием к ней снизу некоторого количества нулевых строк длины n, то B — ступенчатая матрица.*

Доказательство. Допустим, что r-я строка матрицы B нулевая. Если эта строка одна из добавленных, то все строки, расположенные ниже ее, являются нулевыми по условию. Если же эта r-я строка принадлежит матрице A, то согласно определению ступенчатой матрицы строки матрицы A, расположенные ниже r-й, оказываются нулевыми. Под ними же располагаются добавленные строки, являющиеся нулевыми по условию. Следовательно, матрица B удовлетворяет первому требованию, входящему в определение ступенчатой матрицы. Поскольку все ненулевые строки матрицы B являются строками матрицы A и расположены в том же порядке, то их лидеры удовлетворяют второму условию из определения ступенчатой матрицы. Следовательно, B ступенчатая.

Решающую роль для построения нужной нам теории играет следующий факт.

Теорема 2.6. *Всякую матрицу конечным числом элементарных преобразований строк можно превратить в ступенчатую матрицу.*

Доказательство. Пусть A — произвольная матрица и m — число ее строк. Если $A = O$, то она ступенчатая. Если A ненулевая, то в ней есть хоть один ненулевой элемент. Ненулевой элемент располагается в какой-то строке. Значит, в нашей матрице есть ненулевые строки. Выберем ту из них, в которой лидер располагается в столбце с наименьшим номером, скажем, с номером k_1. Применив преобразование первого типа, перенесем эту строку на первое место. Тогда матрица

примет вид

$$\begin{Vmatrix} 0 & \dots & 0 & b_{1k_1} & \dots \\ 0 & \dots & 0 & b_{2k_1} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & b_{mk_1} & \dots \end{Vmatrix},$$

причем $b_{1k_1} \neq 0$. Теперь будем применять преобразования второго типа: ко второй строке прибавим первую, умноженную на $-\frac{b_{2k_1}}{b_{1k_1}}$, к третьей строке — первую, умноженную на $-\frac{b_{3k_1}}{b_{1k_1}}$, и т. д. По теореме 2.4 после применения $m-1$ таких элементарных преобразований получим такую матрицу, что в ее k_1-м столбце все элементы, кроме первого, равны нулю:

$$\begin{Vmatrix} 0 & \dots & 0 & b_{1k_1} & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \end{Vmatrix}.$$

Однострочная матрица

$$\| 0 \quad \dots \quad 0 \quad b_{1k_1} \quad \dots \|$$

является ступенчатой, ибо условия, входящие в определение ступенчатой матрицы, выполняются для нее тривиальным образом: нулевых строк нет и строк с лидером, расположенным в k_{i+1}-м столбце, также нет. В силу теоремы 2.5 матрица B оказывается ступенчатой и в случае, когда все ее строки начиная со второй нулевые. Если это не так, то, как и выше, находим среди них строку, лидер которой располагается в столбце с наименьшим номером, скажем, с номером k_2. Поскольку левее и ниже элемента b_{1k_1} стоят только нули, то $k_1 < k_2$. Поставим найденную строку на второе место и, снова воспользовавшись теоремой 2.4, придем к матрице

$$C = \begin{Vmatrix} 0 & \dots & 0 & b_{1k_1} & b_{1k_1+1} & \dots & b_{1k_2-1} & b_{1k_2} & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{2k_2} & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \end{Vmatrix},$$

где $c_{2k_2} \neq 0$ (конечно, может случиться, что $k_2 = k_1 + 1$ и элементов $b_{1k_1+1}, \dots, b_{1k_2-1}$ не будет). Ясно, что первые две строки матрицы C образуют ступенчатую матрицу.

Если $m = 2$ или все строки матрицы C начиная с третьей нулевые, то, как и выше, заключаем, что C — ступенчатая матрица. Если же среди этих строк есть ненулевые, то те же рассуждения, что и раньше, позволяют прийти к матрице

$$\begin{Vmatrix} 0 \ldots & 0 & b_{1k_1} & b_{1k_1+1} \ldots & b_{1k_2-1} & b_{1k_2} & b_{1k_2+1} \ldots & b_{1k_3-1} & b_{1k_3} \ldots \\ 0 \ldots & 0\ 0 & 0 & \ldots 0 & & c_{2k_2} & c_{2k_2+1} \ldots & c_{2k_3-1} & c_{2k_3} \ldots \\ 0 \ldots & 0\ 0 & 0 & \ldots 0 & & 0 & 0 & \ldots 0 & d_{2k_3} \ldots \\ 0 \ldots & 0\ 0 & 0 & \ldots 0 & & 0 & 0 & \ldots 0 & 0 \ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ 0 \ldots & 0\ 0 & 0 & \ldots 0 & & 0 & 0 & \ldots 0 & 0 \ldots \end{Vmatrix},$$

где $d_{2k_3} \neq 0$. Опять замечаем, что матрица, расположенная в первых трех строках, ступенчатая, и либо убеждаемся в ступенчатости всей матрицы, либо имеем возможность добиться того, что в первых четырех строках располагается ступенчатая матрица. Ясно, что самое большее через m шагов ступенчатой окажется матрица, содержащая все m строк.

Изложенное доказательство теоремы 2.6 эффективно в том смысле, что в нем содержится практический метод приведения данной матрицы к ступенчатому виду. Например, такое приведение матрицы

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 3 & 4 \end{Vmatrix}$$

осуществляется следующим образом:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \end{Vmatrix}$$ (из второй, третьей и четвертой строк вычитается первая),

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$ (к третьей строке прибавляется вторая, а к четвертой — вторая, умноженная на 2).

Для матрицы

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

получаем

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$$ (меняются местами первая и третья строки),

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$$ (из второй строки вычитается первая),

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$ (к третьей строке прибавляем вторую),

а для матрицы

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 9 & 14 \end{Vmatrix}$$

будем иметь

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 8 & 11 \end{Vmatrix}$$ (из второй и третьей строки вычитаем первую),

и

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{Vmatrix}$$ (к третьей строке прибавляется вторая, умноженная на (— 3)).

Упражнения

1. Пусть лидеры строк $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{a}+\bar{b}$ расположены в столбцах с номерами k, l и m соответственно, причем $k \leqslant l$. Доказать, что $k \leqslant m$. Привести примеры строк, для которых $k < m$. Доказать, что это возможно лишь при $k = l$.

2. Пусть $\bar{a} = (1, 2, -3, 0, 1)$ и $\bar{b} = (1, -1, 0, 2, 3)$. Найти строку $\bar{x}$, для которой $\bar{a} + \bar{x} = \bar{b}$.

3. Доказать, что уравнение $\bar{a} + \bar{x} = \bar{0}$ разрешимо для любой строки $\bar{a}$.

4. Доказать, что $0\bar{a} = \bar{0} = \lambda\bar{0}$ и $(-1)\bar{a} + \bar{a} = \bar{0}$ для любой строки $\bar{a}$ и любого действительного числа λ.

5. Пусть $\bar{a} = (5, -8, -1, 2)$ $\bar{b} = (2, -1, 4, -3)$ и $\bar{c} = (-3, 2, -5, 4)$. Найти строки $\bar{x}$ и $\bar{y}$, удовлетворяющие уравнениям

$$\bar{a} + 2\bar{b} + 3\bar{c} + 4\bar{x} = \bar{0}$$

и

$$3(\bar{a} - \bar{y}) + 2(\bar{a} + \bar{y}) = 5(\bar{c} + \bar{y}).$$

6. Говорят, что строка $\bar{a}$ является *линейной комбинацией* строк $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_m$, если $\bar{a} = \lambda_1\bar{a}_1 + \ldots + \lambda_m\bar{a}_m$ для некоторых чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$.

а) Найти линейную комбинацию $3\bar{a} + 5\bar{b} - \bar{c}$, где $\bar{a} = (4, 1, 3, -2)$, $\bar{b} = (1, 2, -3, 2)$, $\bar{c} = (16, 9, 1, -3)$.

б) Если строка $\bar{c}$ является линейной комбинацией строк $\bar{b}_1$, $\bar{b}_2$, ..., $\bar{b}_s$, а каждая из этих строк — линейной комбинацией строк $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, ..., $\bar{a}_r$, то строка $\bar{c}$ является линейной комбинацией строк $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, ..., $\bar{a}_r$. Доказать.

7. Привести к ступенчатому виду:

а) $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 40 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 20 \end{Vmatrix}$; б) $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 20 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 200 \end{Vmatrix}$;

в) $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$; г) $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$;

д) $\begin{Vmatrix} 20 & 12 & 0 & 10 & 120 \\ 20 & 0 & 15 & 10 & 120 \\ 0 & 12 & 15 & 10 & 120 \end{Vmatrix}$;

е) $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$

(матрица размера $n \times n$).

8. Доказать, что перемена местами i-й и j-й строк может быть осуществлена с помощью следующей последовательности элементарных преобразований: 1) прибавление к i-й строке j-й строки, умноженной на (—1); 2) прибавление к j-й строке i-й строки; 3) прибавление к i-й строке j-й строки, умноженной на (—1); 4) умножение i-й строки на (—1).

9. Доказать, что элементарными преобразованиями строк и столбцов любую матрицу можно привести к диагональному виду (матрица D называется *диагональной*, если $d_{ij} = 0$ при $i \neq j$). Привести пример, показывающий, что существуют матрицы, которые нельзя привести к диагональному виду элементарными преобразованиями строк.

10. Доказать аналог теоремы 2.4 для элементарных преобразований III типа, а аналоги теорем 2.4 и 2.6 — для элементарных преобразований столбцов.

11. Доказать, что, совершая с ненулевой матрицей

$$A = \begin{Vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{Vmatrix}$$

элементарные преобразования II типа со строками и столбцами, матрицу A можно привести к виду

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -ab \end{Vmatrix}.$$

12. Пусть матрица B получена из матрицы A при помощи конечного числа элементарных преобразований строк I, II и III типов.

Доказать, что каждая строка матрицы B является линейной комбинацией строк матрицы A. Указание: использовать упр. 6 б).

13 (А. Н. Миронов). Пусть B и C — ступенчатые матрицы, полученные из матрицы A конечным числом элементарных преобразований строк I, II и III типов. Доказать, что лидеры строк матриц B и C располагаются в одних и тех же столбцах. Указание: использовать упр. 12.

§ 3. МЕТОД РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Система линейных уравнений

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{3.1}$$

однозначно определяется матрицей

$$\left\|\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right\|,$$

которая называется *расширенной матрицей системы.* Матрица, стоящая левее вертикальной черты, называется *матрицей системы.* Например, расширенными матрицами систем

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 4, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 4, \\ x_1 + x_2 + 2x_4 &= 4, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 &= 4; \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} -x_3 + x_4 &= 1, \\ x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0, \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

и

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6, \\ x_1 + 4x_2 + 9x_3 &= 14 \end{aligned} \tag{3.4}$$

служат матрицы

$$\left\|\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 3 & 4 \end{array}\right\|, \quad \left\|\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right\|$$

и

$$\left\|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 9 & 14 \end{array}\right\|$$

соответственно.

В дальнейшем, говоря о строках системы линейных уравнений, мы будем иметь в виду строки соответствующей расширенной матрицы.

Теорема 3.1. *Если некоторую строку системы линейных уравнений умножить на отличное от нуля число, то возникает система линейных уравнений, эквивалентная исходной.*

Доказательство. Допустим, что на отличное от нуля число λ умножается i-я строка системы (3.1). Соответствующее уравнение принимает вид

$$(\lambda a_{i1})\, x_1 + (\lambda a_{i2})\, x_2 + \ldots + (\lambda a_{in})\, x_n = \lambda b_i. \qquad (3.5)$$

Если $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — решение системы (3.1), то, подставляя его в левую часть уравнения (3.5), получим

$$(\lambda a_{i1})\,\alpha_1 + (\lambda a_{i2})\,\alpha_2 + \ldots + (\lambda a_{in})\,\alpha_n = \\ = \lambda\,(a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \ldots + a_{in}\alpha_n) = \lambda b_i.$$

Следовательно, строка $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ является решением уравнения (3.5). Поскольку остальные уравнения новой системы такие же, как у старой, то эта строка является решением новой системы. Допустим теперь, что строка $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ служит решением новой системы. Тогда она служит решением для всех уравнений системы (3.1), кроме, быть может, i-го. Подставляя это решение в уравнение (3.5) и вынося λ за скобки, получим

$$\lambda\,(a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \ldots + a_{in}\alpha_n) = \lambda b_i.$$

Поскольку $\lambda \neq 0$, то отсюда вытекает

$$a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \ldots + a_{in}\alpha_n = b_i,$$

т. е. $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ оказывается решением i-го уравнения системы (3.1), а значит, и решением всей этой системы.

Теорема 3.2. *Если от матрицы $\tilde{A}$ к матрице $\tilde{B}$ можно перейти конечным числом элементарных преобразований строк, то соответствующие системы линейных уравнений эквивалентны.*

Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма. *Если от матрицы $\tilde{A}$ к матрице $\tilde{B}$ можно перейти конечным числом элементарных преобразований*

строк, то всякое решение системы, соответствующей матрице $\tilde{A}$, служит решением системы, соответствующей матрице $\tilde{B}$.

Для доказательства сначала допустим, что переход от $\tilde{A}$ к $\tilde{B}$ осуществлен с помощью одного элементарного преобразования. Если при этом применено элементарное преобразование первого типа, т. е. переставлены местами строки, то наши уравнения только меняются местами. Конечно, старые решения по-прежнему будут им удовлетворять. При элементарных преобразованиях второго типа к i-й строке прибавляем j-ю строку, умноженную на λ. Следовательно, i-я строка матрицы $\tilde{B}$ имеет вид

$$(a_{i1} + \lambda a_{j1}, \ \ldots, \ a_{in} + \lambda a_{jn} \mid b_i + \lambda b_j).$$

Пусть $(\alpha_1, \alpha_2, \ \ldots, \ \alpha_n)$ — решение системы с матрицей $\tilde{A}$, т. е. решение каждого из ее уравнений. Будет ли оно решением системы с матрицей $\tilde{B}$? Сомнение может вызвать только i-е уравнение этой системы. Но

$$(a_{i1} + \lambda a_{j1})\alpha_1 + \ldots + (a_{in} + \lambda a_{jn})\alpha_n =$$
$$= (a_{i1}\alpha_1 + \ldots + a_{in}\alpha_n) + \lambda (a_{j1}\alpha_1 + \ldots + a_{jn}\alpha_n) = b_i + \lambda b_j.$$

Таким образом, для рассматриваемого частного случая лемма доказана. В общем случае мы имеем последовательность матрицы $\tilde{A}$, $\tilde{C}_1$, $\ldots$, $\tilde{C}_k$, $\tilde{B}$, где от левой матрицы к правой можно перейти, используя одно элементарное преобразование. Поэтому любое решение системы с расширенной матрицей $\tilde{A}$ служит решением системы с расширенной матрицей $\tilde{C}_1$. Но тогда оно служит решением системы с расширенной матрицей $\tilde{C}_2$. Продолжая таким образом, убедимся, что это решение является решением системы с расширенной матрицей $\tilde{B}$.

Переходя к доказательству теоремы, заметим, что согласно лемме каждое решение системы, соответствующей матрице $\tilde{A}$, служит решением системы, соответствующей матрице $\tilde{B}$. С другой стороны, в силу теоремы 2.4 от матрицы $\tilde{B}$ к матрице $\tilde{A}$ можно перейти с помощью элементарных преобразований. Следовательно, применив лемму еще раз, видим, что каждое решение системы с расширенной матрицей $\tilde{B}$ служит решением системы с расширенной матрицей $\tilde{A}$. Таким образом, эти системы эквивалентны.

Теперь ясно, что для нахождения решений любой системы линейных уравнений достаточно уметь находить решения ступенчатой системы, так как любую матрицу

можно привести к ступенчатому виду, а после элементарных преобразований получается эквивалентная система уравнений.

Например, заметив, что в конце § 2 к ступенчатому виду были приведены расширенные матрицы систем (3.2)—(3.4), заключаем, что вместо них можно решать системы

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4,$$
$$x_3 - x_4 = 0$$

(последние два уравнения отброшены на основании теоремы 1.1),

$$x_2 + x_3 = 0,$$
$$x_3 - x_4 = 0,$$
$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 1$$

и

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3,$$
$$x_2 + 2x_3 = 3,$$
$$2x_3 = 2$$

соответственно.

Приступим к анализу ступенчатой системы линейных уравнений.

Пусть нам дана ступенчатая матрица, соответствующая системе m линейных уравнений с n неизвестными. Возможны следующие два случая:

I. Существует строка, лидер которой расположен в последнем столбце.

II. Такой строки нет.

В первом случае соответствующая система уравнений содержит уравнение вида $0x_1 + \ldots + 0x_n = b$, где $b \neq 0$. Ясно, что никакой набор значений x_i не может удовлетворять этому уравнению, а тем более всем уравнениям системы. Значит, система уравнений не имеет решений.

Для анализа второго случая допустим, что рассматриваемая ступенчатая матрица содержит r ненулевых строк и что первые ненулевые элементы этих строк располагаются в столбцах с номерами $k_1, \ldots, k_r$. По определению ступенчатой матрицы

$$1 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_r \leqslant n.$$

Неизвестные $x_{k_1}, \ldots, x_{k_r}$ назовем *главными*, а все остальные (если они есть)— *свободными*. Кроме того,

отбросим уравнения, соответствующие нулевым строкам, что в силу теоремы 1.1 приведет к системе, эквивалентной исходной.

Допустим сначала, что свободных неизвестных нет. Тогда

$$r = n, \quad k_1 = 1, \quad k_2 = 2, \ \ldots, \ k_n = n$$

и рассматриваемая система имеет вид

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1\,n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{22}x_2 + \ldots + a_{2\,n-1}x_{n-1} + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n-1\,n-1}x_{n-1} + a_{n-1\,n}x_n &= b_{n-1}, \\ a_{nn}x_n &= b_n, \end{aligned}$$

причем a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn} отличны от нуля. Поскольку $a_{nn} \neq 0$, из последнего уравнения однозначно определяется x_n. После этого предпоследнее уравнение позволяет однозначно определить x_{n-1} и т. д. Таким образом, в выделенном случае рассматриваемая система имеет единственное решение.

Предположим теперь, что свободные неизвестные есть. В этом случае мы обозначим через L_i сумму свободных неизвестных, умноженных на стоящие перед ними коэффициенты i-го уравнения, и, перенося свободные неизвестные в правую часть, придем к системе

$$\begin{aligned} a_{1k_1}x_{k_1} + a_{1k_2}x_{k_2} + \ldots + a_{1k_r}x_{k_r} &= b_1 - L_1, \\ a_{2k_2}x_{k_2} + \ldots + a_{2k_r}x_{k_r} &= b_2 - L_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{rk_r}x_{k_r} &= b_r - L_r, \end{aligned}$$

где коэффициенты a_{1k_1}, a_{2k_2}, ..., a_{rk_r} отличны от нуля. Как и выше, мы можем последовательно определять x_{k_r}, $x_{k_{r-1}}$ и т. д., если придадим свободным неизвестным какие-либо определенные значения. При этом главные неизвестные определяются однозначно. Придавая свободным неизвестным всевозможные значения, найдем все решения данной системы, т. е. решим ее. Поскольку свободным неизвестным можно придавать различные значения, система в рассматриваемом случае имеет более одного решения.

Анализируя описанным образом ступенчатые системы, возникшие из систем (3.2)—(3.4), заключаем: 1) система (3.3) решений не имеет; 2) система (3.4) имеет единственное решение (1, 1, 1); 3) в системе (3.2) неизвестные x_1 и x_3 являются главными, а x_2 и x_4 — свободными, причем $x_3 = x_4$, а $x_1 = 4 - x_2 - 2x_4$. Последнее можно трактовать так: всякое решение системы (3.2) имеет вид

$$(4 - \alpha - 2\beta,\ \alpha,\ \beta,\ \beta),$$

где α и β — произвольные действительные числа.

Система линейных уравнений называется *однородной*, если все ее правые части равны нулю. Однородная система всегда имеет решение, например нулевую строку. Поэтому интересно выяснить, когда имеются и ненулевые решения.

Теорема 3.3. *Если число уравнений однородной системы линейных уравнений меньше числа неизвестных, то она имеет хотя бы одно ненулевое решение.*

Доказательство. Приведем данную однородную систему к ступенчатому виду. Разумеется, она останется однородной. Ясно, что число главных неизвестных не может превысить числа строк. Следовательно, существуют свободные неизвестные, что обеспечивает существование ненулевых решений: ведь свободным неизвестным можно придать и ненулевые значения.

Теорема 3.4. *Однородная ступенчатая система n линейных уравнений с n неизвестными обладает ненулевыми решениями в том и только в том случае, когда ее матрица содержит нулевую строку.*

Доказательство. Если есть нулевая строка, то согласно теореме 1.1 ее можно отбросить, и существование ненулевых решений вытекает из теоремы 3.3. Если же нулевых строк нет, то все неизвестные оказываются главными, а поскольку все свободные члены равны 0, последовательно (начиная с конца!) получаем, что все неизвестные должны равняться нулю.

Теорема 3.5. *Если строки $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_t$ являются решениями уравнения*

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0, \qquad (3.6)$$

то для любых действительных чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$ строка

$$\bar{u} = \lambda_1\bar{u}_1 + \ldots + \lambda_t\bar{u}_t$$

также является решением этого уравнения.

Доказательство. Пусть

$$\bar{u}_i = (\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in}) \quad (i = 1, 2, \ldots, t).$$

Тогда

$$\bar{u} = (\lambda_1\alpha_{11} + \ldots + \lambda_t\alpha_{t1}, \ldots, \lambda_1\alpha_{1n} + \ldots + \lambda_t\alpha_{tn}).$$

Поскольку $\bar{u}_i$ — решения уравнения (3.6), то

$$a_1(\lambda_1\alpha_{11} + \ldots + \lambda_t\alpha_{t1}) + \ldots + a_n(\lambda_1\alpha_{1n} + \ldots + \lambda_t\alpha_{tn}) =$$
$$= \lambda_1(a_1\alpha_{11} + \ldots + a_n\alpha_{1n}) + \ldots + \lambda_t(a_1\alpha_{t1} + \ldots + a_n\alpha_{tn}) =$$
$$= \lambda_1 \cdot 0 + \ldots + \lambda_t \cdot 0 = 0,$$

т. е. $\bar{u}$ оказывается решением уравнения (3.6).

Резюмируя результаты этого параграфа, можно сказать, что мы располагаем методом, позволяющим решить любую систему линейных уравнений, т. е. или установить, что она не имеет решений, или указать ее единственное решение, или, выбрав свободные неизвестные, выразить через них остальные. Этот метод часто называют методом Гаусса или методом последовательного исключения неизвестных. Однако остается неясным, не зависит ли число свободных неизвестных от способа решения. Более того, даже в случае, если такой зависимости нет, остается открытым вопрос: существует ли для данного набора неизвестных способ решения, при котором именно эти неизвестные окажутся свободными? Напомним, что в § 1 была приведена система, имеющая свободные неизвестные, но не всякое неизвестное которой можно объявить свободным. А важность знания номеров неизвестных, которые можно объявить свободными, трудно переоценить. Предположим, что система линейных уравнений возникла из какой-либо инженерной задачи. Если неизвестное нельзя объявить свободным, то его значением нельзя маневрировать для того, чтобы добиться более приемлемого с инженерной точки зрения решения. Так, например, в задаче о трубах, рассматривавшейся в § 1, дополнительные ограничения можно накладывать лишь на объем воды, проходящей через первую, вторую и четвертую трубы.

Ответить на поставленные выше вопросы позволяет теория, развиваемая в последующих параграфах.

Упражнения

1. Решить системы линейных уравнений:

а) $5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 = 10,$
$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4,$
$x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 2;$

б) $-9x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 10x_4 = 3,$
$-6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2,$
$-3x_1 + 2x_2 + 11x_3 - 15x_4 = 1:$

в) $9x_1 - 20x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1,$
$4x_1 - 9x_2 + x_3 + 2x_4 = 2,$
$-2x_1 + 5x_2 + x_3 + 4x_4 = 8$

(указание: для упрощения вычислений можно сначала из первой строки вычесть удвоенную вторую);

г) $12x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13,$
$4x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3,$
$8x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7;$

д) $-6x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4,$
$-2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2,$
$-4x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3;$

е) $x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0,$
$3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0,$
$4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0,$
$3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0;$

ж) $x_1 - x_3 = 0,$
$x_2 - x_4 = 0,$
$-x_1 + x_3 - x_5 = 0,$
$-x_2 + x_4 - x_6 = 0,$
$-x_3 + x_5 = 0,$
$-x_4 + x_6 = 0;$

з) $x_1 - x_3 + x_5 = 0,$
$x_2 - x_4 + x_6 = 0,$
$x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0,$
$x_2 - x_3 + x_6 = 0,$
$x_1 - x_4 + x_5 = 0;$

и) $5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 4x_5 = 0,$
$2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0,$
$7x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0,$
$5x_1 + 9x_2 - 3x_3 + x_4 + 6x_5 = 0:$

к) $3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0,$
$5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0,$
$4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 0,$
$7x_1 + 10x_2 + x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 0;$

л) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 \qquad\qquad &= 0, \\ x_1 + x_2 \quad + x_3 &= 0, \\ x_2 + x_3 \quad + x_4 &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ x_{n-2} + x_{n-1} + x_n &= 0, \\ x_{n-1} + x_n &= 0. \end{aligned}$$

2. Решить задачи, сформулированные в упр. 1 из § 1. В задаче б) дополнительно найти решения при максимально возможном числе 20-копеечных и 15-копеечных монет. В задаче д) найти решения, соответствующие максимальному и минимальному использованию самой маломощной бетономешалки, если потребовать, чтобы число ее рабочих часов было целым.

3. Система линейных уравнений однородна тогда и только тогда, когда нулевая строка является ее решением (доказать).

4. Составить систему, состоящую из двух линейных уравнений, для которой строки (1, 1, 1, 1) и (1, 2, 2, 1) служат решениями.

5. Доказать, что, отбросив строку расширенной матрицы системы линейных уравнений, являющуюся линейной комбинацией остальных, мы получим систему линейных уравнений, эквивалентную исходной.

6. Сформулировать и доказать условия на элементы расширенной матрицы системы линейных уравнений с n неизвестными, необходимые и достаточные для того, чтобы всякая строка длины n служила решением этой системы.

7. Может ли система линейных уравнений с действительными коэффициентами иметь в точности два различных решения?

§ 4. РАНГ МАТРИЦЫ

Квадратная матрица называется *вырожденной*, если с помощью конечного числа элементарных преобразований строк она может быть превращена в матрицу, имеющую хотя бы одну нулевую строку.

Теорема 4.1. *Следующие свойства квадратной матрицы A эквивалентны*:

(1) *A — вырожденная матрица*;

(2) *система однородных линейных уравнений с матрицей A имеет хотя бы одно ненулевое решение*;

(3) *при любом способе приведения матрицы A к ступенчатому виду элементарными преобразованиями строк получаемая ступенчатая матрица содержит нулевую строку.*

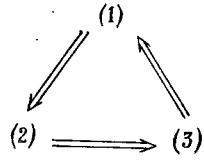

Рис. 1

Доказательство. Утверждение теоремы состоит в том, что при выполнении какого-либо из свойств (1)—(3) оказываются справедливыми и все остальные. Чтобы установить это, докажем, что из свойства (1) вытекает свойство (2), из (2) — свойство (3) и из (3) — свойство (1) (рис. 1), откуда и следует искомая эквивалентность всех трех свойств.

На всем протяжении этого доказательства условимся обозначать через $\bar{A}$ матрицу, полученную из A присоединением справа нулевого столбца.

(1)⇒(2). Если A — вырожденная матрица, то согласно определению после выполнения конечного числа подходящих элементарных преобразований строк она превращается в матрицу B с нулевой строкой. Те же самые элементарные преобразования превращают матрицу $\bar{A}$ в матрицу $\bar{B}$. Тогда матрица $\bar{B}$ содержит нулевую строку, отбрасывание которой приводит к системе, которая по теореме 1.1 эквивалентна системе с расширенной матрицей $\bar{B}$. Но число уравнений в этой системе меньше числа неизвестных, и по теореме 3.3 она обладает ненулевым решением. Следовательно, ненулевым решением обладает система с расширенной матрицей $\bar{B}$, а значит, и эквивалентная ей по теореме 3.2 система с матрицей $\bar{A}$.

(2)⇒(3). Пусть C — ступенчатая матрица, полученная из A конечным числом элементарных преобразований. Тогда матрица $\bar{C}$ получается из матрицы $\bar{A}$ теми же элементарными преобразованиями. Из теоремы 3.2 вытекает, что система с расширенной матрицей $\bar{C}$ обладает ненулевым решением. Теперь существование нулевой строки у матрицы $\bar{C}$, а значит, и у матрицы C вытекает из теоремы 3.4.

(3)⇒(1). Достаточно вспомнить, что по теореме 2.6 матрица A приводится к ступенчатому виду, и воспользоваться свойством (3).

Теорема 4.2. *Если A — вырожденная матрица и от A к B можно перейти конечным числом элементарных преобразований, то B — вырожденная матрица.*

Доказательство. По теореме 2.4 от матрицы B к матрице A можно перейти с помощью конечного числа элементарных преобразований строк. С другой стороны, по определению вырожденной матрицы конечное число подходящих элементарных преобразований строк позволяет перейти от матрицы A к матрице C, имеющей нулевую строку. Следовательно, от B к C также можно перейти конечным числом элементарных преобразований строк, и вырожденность матрицы B вытекает из определения.

Теорема 4.3. *Если A — вырожденная матрица, а матрица B получена из A умножением одной из ее строк на действительное число λ, то B — также вырожденная матрица.*

Доказательство. Если $\lambda = 0$, то матрица B оказывается вырожденной по определению. Если же $\lambda \neq 0$, то из теоремы 3.1 вытекает, что системы однородных линейных уравнений с матрицами A и B эквивалентны. Но по теореме 4.1 система однородных линейных уравнений с матрицей A обладает ненулевым решением. Следовательно, система однородных линейных уравнений с матрицей B также обладает ненулевым решением, и вырожденность матрицы B вытекает из теоремы 4.1.

Теорема 4.4. *Если матрицы*

$$A' = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1\,1} & a_{i-1\,2} & \dots & a_{i-1\,n} \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \dots & a'_{in} \\ a_{i+1\,1} & a_{i+1\,2} & \dots & a_{i+1\,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad A'' = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1\,1} & a_{i-1\,2} & \dots & a_{i-1\,n} \\ a''_{i1} & a''_{i2} & \dots & a''_{in} \\ a_{i+1\,1} & a_{i+1\,2} & \dots & a_{i+1\,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

вырожденные, то матрица

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1\,1} & a_{i-1\,2} & \dots & a_{i-1\,n} \\ a'_{i1} + a''_{i1} & a'_{i2} + a''_{i2} & \dots & a'_{in} + a''_{in} \\ a_{i+1\,1} & a_{i+1\,2} & \dots & a_{i+1\,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

также является вырожденной.

Доказательство. По теореме 4.1 системы однородных линейных уравнений с матрицами A' и A'' обладают ненулевыми решениями. Пусть

$$\bar{u}' = (\alpha'_1, \dots, \alpha'_n)$$

и

$$\bar{u}'' = (\alpha''_1, \dots, \alpha''_n)$$

— эти решения. Ясно, что как строка $\bar{u}'$, так и строка $\bar{u}''$ удовлетворяют всем уравнениям системы однородных линейных уравнений с матрицей A, кроме, быть может, i-го. В силу теоремы 3.5 этим уравнениям удовлетворяют любые строки вида $\lambda\bar{u}' - \mu\bar{u}''$, где λ и μ — произвольные действительные числа. Положим

$$\lambda = a'_{i1}\alpha''_1 + \dots + a'_{in}\alpha''_n$$

и

$$\mu = a''_{i1}\alpha'_1 + \dots + a''_{in}\alpha'_n.$$

Тогда

$$(a'_{i1}+a''_{i1})(\lambda\alpha'_1-\mu\alpha''_1)+\ldots+(a'_{in}+a''_{in})(\lambda\alpha'_n-\mu\alpha''_n)=$$
$$=\lambda(a'_{i1}\alpha'_1+\ldots+a'_{in}\alpha'_n)+\lambda(a''_{i1}\alpha'_1+\ldots+a''_{in}\alpha'_n)-$$
$$-\mu(a'_{i1}\alpha''_1+\ldots+a'_{in}\alpha''_n)-\mu(a''_{i1}\alpha''_1+\ldots+a''_{in}\alpha''_n)=$$
$$=\lambda 0+\lambda\mu-\mu\lambda-\mu 0=0.$$

Следовательно, если строка $\lambda\bar{u}'-\mu\bar{u}''\neq\bar{0}$, то она оказывается ненулевым решением системы однородных линейных уравнений с матрицей A, что ввиду теоремы 4.1 доказывает вырожденность матрицы A. Допустим теперь, что $\lambda\bar{u}'-\mu\bar{u}''=\bar{0}$. Если при этом $\mu\neq 0$, то $\bar{u}''=\frac{\lambda}{\mu}\bar{u}'$, откуда

$$(a'_{i1}+a''_{i1})\alpha''_1+\ldots+(a'_{in}+a''_{in})\alpha''_n=$$
$$=\frac{\lambda}{\mu}(a'_{i1}\alpha'_1+\ldots+a'_{in}\alpha'_n)+(a''_{i1}\alpha''_1+\ldots+a''_{in}\alpha''_n)=$$
$$=\frac{\lambda}{\mu}0+0=0.$$

Следовательно, система однородных линейных уравнений с матрицей A опять обладает ненулевым решением $\bar{u}''$, и, как и выше, вырожденность матрицы A вытекает из теоремы 4.1. Если, наконец, $\mu=0$, то

$$(a'_{i1}+a''_{i1})\alpha'_1+\ldots+(a'_{in}+a''_{in})\alpha''_n=$$
$$=(a'_{i1}\alpha'_1+\ldots+a'_{in}\alpha'_n)+(a''_{i1}\alpha'_1+\ldots+a''_{in}\alpha'_n)=$$
$$=0+\mu=0+0=0.$$

Снова у однородной системы линейных уравнений с матрицей A нашлось ненулевое решение $\bar{u}'$, и можно опять воспользоваться теоремой 4.1.

Если в матрице A отметить какие-нибудь k строк и k столбцов, то элементы, стоящие на пересечении отмеченных строк и столбцов, образуют квадратную матрицу порядка k — *подматрицу* матрицы A. Наивысший порядок невырожденных подматриц матрицы A называется ее *рангом*. Разумеется, ранг матрицы размера $m\times n$ не превосходит наименьшего из чисел m и n. Если же в

матрице A невырожденных подматриц нет, то ее ранг по определению равен нулю. Ясно, что нулевые матрицы, и только они, не содержат невырожденных подматриц, так что ранг матрицы A равен нулю тогда и только тогда, когда A — нулевая матрица.

Теорема 4.5. *Ранг ступенчатой матрицы равен числу ее ненулевых строк.*

Доказательство. Если $A = 0$, то ее ранг равен нулю по определению. Если же A — ненулевая ступенчатая матрица, то допустим, что она содержит r ненулевых строк. Тогда, отметив ненулевые строки и столбцы, в которых располагаются их лидеры, получим ступенчатую подматрицу, не содержащую нулевых строк. По теореме 4.1 эта подматрица невырожденная, так что матрица A содержит невырожденную подматрицу порядка r. Всякая же подматрица большего порядка содержит нулевую строку и оказывается вырожденной по определению.

Решающее значение для нашего исследования имеет

Теорема 4.6. *Ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях строк.*

Сначала будет доказана

Лемма. *Если от матрицы A к матрице B можно перейти конечным числом элементарных преобразований строк, то* (*ранг* B) $\leqslant$ (*ранг* A).

Установим справедливость этой леммы для случая, когда использовано только одно элементарное преобразование. Пусть (ранг A) $= r$. Для доказательства леммы достаточно убедиться, что всякая подматрица M матрицы B порядка, большего r, оказывается вырожденной. Если от матрицы A к матрице B перешли переменой местами двух строк, то подматрица M либо совпадает с некоторой подматрицей M' матрицы A, порядок которой больше r, либо отличается от такой подматрицы M' только порядком строк. Поскольку (ранг A) $= r$, то M' — вырожденная матрица, и вырожденность матрицы M вытекает из теоремы 4.2. Допустим теперь, что переход к матрице B осуществлен прибавлением к i-й строке матрицы A ее j-й строки, умноженной на λ. Возможны три случая: 1) i-я строка не проходит через подматрицу M; 2) как i-я, так и j-я строки проходят через подматрицу M; 3) i-я строка проходит через подматрицу M, а j-я не проходит. В первом случае подматрица M совпадает с соответствующей подматрицей матрицы A и, следовательно, оказывается вырожденной. Во втором слу-

чае имеем

$$M = \begin{Vmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{ik_1} + \lambda a_{jk_1} & \cdots & a_{ik_s} + \lambda a_{jk_s} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{jk_1} & \cdots & a_{jk_s} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{Vmatrix}.$$

Ясно, что матрица M получена из матрицы

$$M' = \begin{Vmatrix} \cdots\cdots\cdots \\ a_{ik_1} & \cdots & a_{ik_s} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{jk_1} & \cdots & a_{jk_s} \\ \cdots\cdots\cdots \end{Vmatrix}$$

с помощью элементарного преобразования второго типа. Но матрица M', будучи подматрицей матрицы A порядка, большего r, является вырожденной. По теореме 4.2 вырожденной должна быть и матрица M. В третьем случае запишем

$$M = \begin{Vmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{ik_1} + \lambda a_{jk_1} & \cdots & a_{ik_s} + \lambda a_{jk_s} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{Vmatrix},$$

$$M' = \begin{Vmatrix} \cdots\cdots\cdots \\ a_{ik_1} & \cdots & a_{ik_s} \\ \cdots\cdots\cdots \end{Vmatrix}, \quad M'' = \begin{Vmatrix} \cdots\cdots\cdots \\ \lambda a_{jk_1} & \cdots & \lambda a_{jk_s} \\ \cdots\cdots\cdots \end{Vmatrix}$$

и

$$M''' = \begin{Vmatrix} \cdots\cdots\cdots \\ a_{jk_1} & \cdots & a_{jk_s} \\ \cdots\cdots\cdots \end{Vmatrix}.$$

Матрица M' является подматрицей матрицы A, а M''' лишь порядком строк отличается от некоторой подматрицы матрицы A. Поскольку порядок этих матриц превышает r, то ввиду теоремы 4.2 обе они оказываются вырожденными. Из теоремы 4.3 вытекает вырожденность матрицы M'', после чего вырожденность матрицы M является следствием теоремы 4.4. Таким образом, для случая, когда использовано лишь одно элементарное преобразование, лемма доказана. Допустим, что использовано k преобразований. Пусть

$$A, C_1, \ldots, C_{k-1}, B$$

— последовательность матриц, возникших при выполнении этих преобразований. В силу доказанного

$$(\text{ранг } B) \leqslant (\text{ранг } C_{k-1}) \leqslant \ldots \leqslant (\text{ранг } C_1) \leqslant (\text{ранг } A).$$

Доказательство теоремы. Допустим, что от матрицы A к матрице B перешли конечным числом элементарных преобразований. Ввиду леммы (ранг B) $\leqslant$ $\leqslant$(ранг A). Но если элементарные преобразования позволяют перейти от A к B, то согласно теореме 2.4 от B к A также можно перейти конечным числом элементарных преобразований. Еще раз применяя лемму, получаем, что (ранг A) $\leqslant$ (ранг B). Нужное равенство сразу следует из полученных неравенств.

Теоремы 2.6, 4.6 и 4.5 дают практический способ вычисления ранга матрицы: следует привести матрицу к ступенчатому виду и сосчитать число ненулевых строк получившейся ступенчатой матрицы. В частности, вычисления, проведенные в конце § 2, показывают, что

$$\text{ранг} \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 3 & 4 \end{Vmatrix} = 2,$$

$$\text{ранг} \begin{Vmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix} = \text{ранг} \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 9 & 14 \end{Vmatrix} = 3.$$

Упражнения

1. Найти ранг матриц, указанных в упр. 7 из § 2.
2. Найти ранг следующих матриц:

а) $\begin{Vmatrix} 18 & 7 & 4 & 8 \\ 10 & 1 & 0 & 4 \\ 17 & 3 & 1 & 7 \\ 40 & 17 & 10 & 18 \end{Vmatrix}$;

б) $\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -7 & -5 & 6 & 0 \\ 8 & -4 & 3 & -1 & -2 & -5 \\ 1 & 0 & -2 & -2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & -2 & 1 & -2 \end{Vmatrix}$;

в) $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \end{Vmatrix}$;

г) $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$;

д) $\begin{Vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \dots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \dots & a_2+b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \dots & a_n+b_n \end{Vmatrix}$.

3. Если A и B — матрицы с одинаковым числом столбцов, то

$$\left(\text{ранг} \begin{Vmatrix} A \\ B \end{Vmatrix}\right) \leqslant (\text{ранг } A) + (\text{ранг } B).$$

4. Если A и B — матрицы с одинаковым числом строк, то

$$\left(\text{ранг} \begin{Vmatrix} A & B \end{Vmatrix}\right) \leqslant (\text{ранг } A) + (\text{ранг } B).$$

5. Если A и B — матрицы одинакового размера, то

$$\text{ранг} \begin{Vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{Vmatrix} \leqslant (\text{ранг } A) + (\text{ранг } B).$$

Указание: воспользоваться упр. 3.

6. Пусть A — невырожденная матрица размера $n \times n$, B — матрица размера $p \times q$, C — матрица размера $n \times q$ и O — нулевая матрица размера $p \times n$. Доказать:

а) $$\text{ранг} \begin{Vmatrix} A & C \\ O & B \end{Vmatrix} = n + (\text{ранг } B).$$

б) если kD обозначает матрицу, полученную из матрицы D умножением всех ее элементов на число k, и $p = n$, то

$$\text{ранг} \begin{Vmatrix} A & B \\ 2A & 5B \end{Vmatrix} = n + (\text{ранг } B).$$

7. Ранг матрицы не меняется при приписывании к ней строки, являющейся линейной комбинацией строк этой матрицы.

8. Доказать, что, применяя элементарные преобразования строк и столбцов всех трех типов, любую матрицу ранга r можно превратить в такую матрицу D, что $d_{11} = \dots = d_{rr} = 1$, а на всех остальных местах стоят нули.

9. Доказать, что если A — квадратная матрица порядка n, причем ее ранг равен n, то, совершая элементарные преобразования

второго типа со строками и столбцами, можно привести матрицу A к виду

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & d \end{Vmatrix}.$$

10. Если некоторый столбец квадратной матрицы A является линейной комбинацией остальных, то A — вырожденная матрица.

Указание: воспользоваться теоремой 4.1.

§ 5. ТЕОРЕМА О ГЛАВНЫХ НЕИЗВЕСТНЫХ

Система линейных уравнений называется совместной, если она имеет решение. В частности, однородная система линейных уравнений всегда совместна.

Теорема 5.1 (теорема Кронекера — Капелли). *Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу ее расширенной матрицы.*

Доказательство. Поскольку согласно теоремам 2.6 и 3.2 от каждой системы линейных уравнений можно перейти к эквивалентной ей ступенчатой системе, а ранги матрицы системы и ее расширенной матрицы в силу теоремы 4.6 при этом меняться не будут, достаточно установить справедливость теоремы для ступенчатой системы. Для ступенчатой же системы в силу теоремы 4.5 ранги матрицы системы и ее расширенной матрицы равны тогда и только тогда, когда эти матрицы имеют одинаковое число ненулевых строк, или, что то же самое, тогда и только тогда, когда первый ненулевой элемент последней ненулевой строки расширенной матрицы не располагается в столбце свободных членов. Из анализа ступенчатой системы, проведенного в § 3, известно, что это имеет место тогда и только тогда, когда система совместна.

Когда в § 3 мы говорили о главных и свободных неизвестных, то эти понятия зависели от способа приведения расширенной матрицы системы к ступенчатому виду. Для решения задач, обсуждавшихся в конце § 3, необходимо иметь определение, зависящее лишь от данной системы линейных уравнений. С этой целью, если дана система линейных уравнений относительно неизвестных $x_1, \dots, x_n$, условимся говорить, что *неизвестные* $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$ *можно объявить главными*, если при любом

задании остальных неизвестных значения этих неизвестных определяются однозначно. Про эти остальные неизвестные будем говорить, что их *можно объявить свободными.* Подчеркнем, что в последних двух фразах определяются термины «можно объявить свободными», «можно объявить главными», а не понятия «главное неизвестное», «свободное неизвестное». Неизвестные становятся главными или свободными лишь после того как мы, реализуя имеющуюся возможность, объявим их таковыми. Ясно, что главные и свободные неизвестные в смысле, определенном в § 3, можно объявить такими и в смысле нашего нового определения.

Центральным результатом нашей теории является

Теорема 5.2 (теорема о главных неизвестных). *Пусть имеется совместная система m линейных уравнений с n неизвестными, $\tilde{A}$ — расширенная матрица этой системы и (ранг $\tilde{A}$) $= r$. Тогда неизвестные $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ можно объявить главными в том и только в том случае, когда $k = r$ и в столбцах матрицы $\tilde{A}$ с номерами $i_1, \ldots, i_k$ располагается невырожденная подматрица порядка r.*

Доказательство. Допустим, что $k = r$ и что в столбцах с указанными номерами располагается невырожденная подматрица порядка r. Тогда ранг матрицы

$$\begin{Vmatrix} a_{1i_1} & a_{1i_2} & \ldots & a_{1i_r} \\ a_{2i_1} & a_{2i_2} & \ldots & a_{2i_r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{mi_1} & a_{mi_2} & \ldots & a_{mi_r} \end{Vmatrix}$$

размера $m \times r$ равен r. Приведя эту матрицу к ступенчатому виду, в силу теорем 4.5 и 4.6 получим матрицу

$$\begin{Vmatrix} b_{1i_1} & b_{1i_2} & \ldots & b_{1i_r} \\ 0 & b_{2i_2} & \ldots & b_{2i_r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & b_{ri_r} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix},$$

где $b_{1i_1}, b_{2i_2}, \ldots, b_{ri_r} \neq 0$. Применив те же самые элементарные преобразования к матрице $\tilde{A}$, получим ма-

трицу

$$\tilde{B}=\left\|\begin{array}{ccccccc|c} \dots & b_{1i_1} & \dots & b_{1i_2} & \dots & b_{1i_r} & \dots & c_1 \\ \dots & 0 & \dots & b_{2i_2} & \dots & b_{2i_r} & \dots & c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & b_{ri_r} & \dots & c_r \\ \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & c_{r+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & c_m \end{array}\right\|.$$

Подчеркнем, что эта запись не означает, что все строки матрицы $\tilde{B}$, начиная с $(r+1)$-й, нулевые: в столбцах с номерами, отличными от $i_1, i_2, \dots, i_r$, могут встретиться ненулевые элементы, стоящие в этих строках. Однако на самом деле все строки матрицы $\tilde{B}$ начиная с $(r+1)$-й нулевые. Действительно, допустим, что это не так, т. е. $b_{pq}=0$ для некоторых p и q, где $r+1 \leqslant p \leqslant m$. Конечно, $q \neq i_1, \dots, i_r$. Однако может случиться, что $q = n+1$, т. е. $b_{pq}=c_p$. Пусть M — подматрица матрицы $\tilde{B}$ порядка $r+1$, расположенная в строках с номерами $1, 2, \dots, r, p$ и в столбцах с номерами $i_1, \dots, i_r, q$. Возможны следующие три случая: 1) $q < i_1$; 2) $i_s < q < i_{s+1}$ для некоторого s; 3) $i_r < q$. Переставляя, если нужно, строки матрицы M, приходим к матрице M', равной

$$\left\|\begin{array}{ccccc} b_{pq} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{1q} & b_{1i_1} & b_{1i_2} & \dots & b_{1i_r} \\ b_{2q} & 0 & b_{2i_2} & \dots & b_{2i_r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{rq} & 0 & 0 & \dots & b_{ri_r} \end{array}\right\|,$$

$$\left\|\begin{array}{ccccccc} b_{1i_1} & \dots & b_{1i_s} & b_{1q} & b_{1i_{s+1}} & \dots & b_{1i_r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & b_{si_s} & b_{sq} & b_{si_{s+1}} & \dots & b_{si_r} \\ 0 & \dots & 0 & b_{pq} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & b_{s+1q} & b_{s+1i_{s+1}} & \dots & b_{s+1i_r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & b_{rq} & 0 & \dots & b_{ri_r} \end{array}\right\|$$

или

$$\left\|\begin{array}{ccccc} b_{1i_1} & b_{1i_2} & \dots & b_{1i_r} & b_{1q} \\ 0 & b_{2i_2} & \dots & b_{2i_r} & b_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{ri_r} & b_{rq} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{pq} \end{array}\right\|$$

соответственно. Поскольку $b_{1i_1}, b_{2i_2}, \ldots, b_{ri_r}, b_{pq} \neq 0$, в третьем случае матрица M' сразу оказывается ступенчатой. В первых же двух случаях ее можно превратить в ступенчатую с помощью элементарных преобразований второго типа, обратив в нуль элементы $b_{1q}, b_{2q}, \ldots, b_{rq}$ и $b_{s+1\,q}, \ldots, b_{rq}$ соответственно (см. теорему 2.3). В силу теорем 4.5 и 4.6

$$(\text{ранг } M) = (\text{ранг } M') = r + 1.$$

Следовательно, M — невырожденная матрица, и, принимая во внимание определение ранга матрицы и теорему 4.6, получаем

$$(\text{ранг } \tilde{A}) = (\text{ранг } \tilde{B}) \geqslant r + 1,$$

что противоречит условию. Таким образом, отбросив у матрицы $\tilde{B}$ нулевые строки, придем к системе линейных уравнений, содержащей r уравнений. Придавая неизвестным, отличным от $x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}$, произвольные значения и перенося их в правую часть, легко убедиться, что неизвестные $x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}$ однозначно определяются одно за другим, начиная с последнего. Таким образом, их можно объявить главными. В силу теорем 1.1 и 3.2 то же самое верно и для исходной системы линейных уравнений.

Допустим теперь, что неизвестные $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ можно объявить главными. Положив остальные неизвестные равными нулю, придем к системе

$$\begin{aligned} a_{1i_1}x_{i_1} + \ldots + a_{1i_k}x_{i_k} &= b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{mi_1}x_{i_1} + \ldots + a_{mi_k}x_{i_k} &= b_m, \end{aligned} \tag{5.1}$$

имеющей единственное решение. Пусть $\tilde{C}$ — расширенная матрица системы (5.1), а $\tilde{B}$ — ступенчатая матрица, к которой согласно теореме 2.6 приводится матрица $\tilde{C}$. В силу теоремы 3.2 соответствующая система линейных уравнений имеет единственное решение. Как показывает анализ ступенчатой системы, проведенный в § 3, отсюда вытекает, что матрица $\tilde{B}$ содержит k ненулевых строк, причем их лидеры располагаются в первом, втором, третьем и т. д. столбцах. Другими словами,

$$\tilde{B} = \left\| \begin{array}{cccc|c} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1k} & c_1 \\ 0 & b_{22} & \ldots & b_{2k} & c_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & b_{kk} & c_k \end{array} \right\|.$$

В силу теорем 4.5 и 4.6

$$k = \text{ранг } \tilde{B} = \text{ранг } \tilde{C} \leqslant \text{ранг } \tilde{A} = r.$$

Допустим, что $k < r$. Применим к матрице $\tilde{A}$ элементарные преобразования, с помощью которых был осуществлен переход от $\tilde{C}$ к $\tilde{B}$. Тогда матрица $\tilde{A}$ превращается в матрицу

$$\tilde{D} = \left\| \begin{array}{ccccccccc|c} \dots & b_{11} & \dots & b_{12} & \dots & b_{1k} & \dots & & & c_1 \\ \dots & 0 & \dots & b_{22} & \dots & b_{2k} & \dots & & & c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & b_{kk} & \dots & & & c_k \\ \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & & & c_{k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & & & c_m \end{array} \right\|,$$

причем столбцы этой матрицы, занимаемые столбцами матрицы $\tilde{B}$, имеют номера $i_1, \dots, i_k, n+1$. В силу теоремы 4.6 (ранг $\tilde{D}$) $= r$, а по теореме 3.2 система линейных уравнений с расширенной матрицей $\tilde{D}$ совместна, и неизвестные $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$ можно объявить главными. Из теоремы 5.1 вытекает, что такой же ранг имеет и матрица D, полученная из $\tilde{D}$ отбрасыванием последнего столбца. Поскольку $k < r$, среди строк матрицы D с номерами, бóльшими k, имеются ненулевые, ибо в противном случае она не могла бы содержать невырожденных подматриц порядка r. Однако ненулевой элемент такой строки не может располагаться в столбце, занятом столбцами матрицы $\tilde{B}$. Таким образом, матрица $\tilde{D}$ содержит элементы $d_{pq} \neq 0$, где $p > k$ и $q \neq i_1, \dots, i_k, n+1$. Если теперь положить равными нулю все неизвестные с номерами, отличными от $i_1, \dots, i_k, q$, то получим $x_q = c_p/d_{pq}$. Поэтому x_q не может быть взят произвольным, что противоречит возможности объявить $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$ главными неизвестными. Следовательно, $k = r$, чем и завершается доказательство.

Из только что доказанной теоремы вытекает, что в системе (1.6) главными можно объявлять или x_1 и x_3, или x_2 и x_3, или x_3 и x_4, а остальные пары нельзя.

Остановимся еще на одном способе описания решений однородной системы линейных уравнений. Из теоремы 3.5 вытекает, что множество всех решений данной однородной системы линейных уравнений от n неизвестных вместе с любым семейством n-мерных строк содержит и их линейную комбинацию. Поэтому естественно

желание найти такое семейство решений (по возможности, самое маленькое), чтобы все остальные решения были линейными комбинациями этого семейства. Одно из таких семейств указывает следующая теорема:

Теорема 5.3. *Пусть неизвестные* $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n-r}}$ *однородной системы линейных уравнений от* n *неизвестных с матрицей* A *ранга* r *можно объявить свободными. Для каждого* k, *где* $1 \leqslant k \leqslant n-r$, *обозначим через* $\bar{u}_k$ *то единственное решение системы, которое получается, если неизвестному* x_{i_k} *придать значение* 1, *а остальным свободным неизвестным — значение* 0. *Тогда всякое решение рассматриваемой системы является линейной комбинацией семейства* $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_{n-r}$.

Доказательство. Пусть

$$\bar{v} = (v_1, \ldots, v_n)$$

— произвольное решение рассматриваемой системы. Рассмотрим строку

$$\bar{w} = v_{i_1}\bar{u}_1 + \bar{v}_{i_2}\bar{u}_2 + \ldots + v_{i_{n-r}}\bar{u}_{n-r}.$$

Согласно теореме 3.5 $\bar{w}$ — также решение этой системы. Нетрудно подсчитать, что i_1-я, i_2-я, ..., i_{n-r}-я координаты строки $\bar{w}$ равны $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_{n-r}}$ соответственно. Другими словами, значения неизвестных $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots$ ..., $x_{i_{n-r}}$ у решений $\bar{v}$ и $\bar{w}$ одни и те же. Но из определения возможности объявить неизвестные свободными вытекает, что задание значений перечисленных неизвестных однозначно определяет значения остальных неизвестных. Следовательно, и оставшиеся координаты строк $\bar{v}$ и $\bar{w}$ должны совпадать, т. е.

$$\bar{v} = \bar{w} = v_{i_1}\bar{u}_1 + v_{i_2}\bar{u}_2 + \ldots + v_{i_{n-r}}\bar{u}_{n-r},$$

что и требовалось.

Невозможность уменьшения числа решений, входящих в найденное выше семейство, вытекает из такого результата:

Теорема 5.4. *Если всякое решение однородной системы линейных уравнений от* n *неизвестных с матрицей* A *ранга* r *является линейной комбинацией решений* $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_s$, *то* $s \geqslant n-r$.

Доказательство. Пусть $s < n-r$. Положим

$$\bar{v}_i = (\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in}) \quad (i = 1, 2, \ldots, s)$$

и, принимая во внимание теорему 5.2, обозначим через

$$\bar{u}_j = (\beta_{j1}, \ldots, \beta_{jn}) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n-r)$$

решения, рассмотренные в теореме 5.3. По условию

$$\bar{u}_j = a_{1j}\bar{v}_1 + \ldots + a_{sj}\bar{v}_s \qquad (j = 1, 2, \ldots, n-r)$$

для подходящих действительных чисел a_{ij}. Рассмотрим однородную систему линейных уравнений

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1\,n-r}x_{n-r} = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2\,n-r}x_{n-r} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{s\,n-r}x_{n-r} = 0. \end{gathered}$$

По предположению число уравнений этой системы меньше числа неизвестных, и в силу теоремы 3.3 она обладает ненулевым решением, скажем, $(\xi_1, \ldots, \xi_{n-r})$. Заметив, что числа $\xi_1, \ldots, \xi_{n-r}$ являются i_1-й, i_2-й, … …, i_{n-r}-й координатами строки

$$\bar{w} = \xi_1\bar{u}_1 + \xi_2\bar{u}_2 + \ldots + \xi_{n-r}\bar{u}_{n-r},$$

и принимая во внимание теоремы 2.1 и 2.2, получим

$$\begin{aligned} \bar{0} \neq \bar{w} = {} & \xi_1(a_{11}\bar{v}_1 + a_{21}\bar{v}_2 + \ldots + a_{s1}\bar{v}_s) + \\ & + \xi_2(a_{12}\bar{v}_1 + a_{22}\bar{v}_2 + \ldots + a_{s2}\bar{v}_s) + \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + \xi_{n-r}(a_{1\,n-r}\bar{v}_1 + a_{2\,n-r}\bar{v}_2 + \ldots + a_{s\,n-r}\bar{v}_s) = \\ & = (\xi_1 a_{11} + \xi_2 a_{12} + \ldots + \xi_{n-r}a_{1\,n-r})\,\bar{v}_1 + \\ & + (\xi_1 a_{21} + \xi_2 a_{22} + \ldots + \xi_{n-r}a_{2\,n-r})\,\bar{v}_2 + \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + (\xi_1 a_{s1} + \xi_2 a_{s2} + \ldots + \xi_{n-r}a_{s\,n-r})\,\bar{v}_s = \\ & \qquad\qquad = 0\bar{v}_1 + 0\bar{v}_2 + \ldots + 0\bar{v}_s = \bar{0}. \end{aligned}$$

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Итак, теорема 5.3 показывает, что все решения однородной системы линейных уравнений можно получить, рассматривая всевозможные линейные комбинации некоторой конечной системы решений.

Чтобы получить столь же прозрачное описание множества всех решений неоднородной системы линейных уравнений, обратим внимание на следующие факты:

Теорема 5.5. а) *Если $\bar{u}$ — решение системы линейных уравнений с матрицей A, а $\bar{v}$ — решение однородной системы линейных уравнений с той же матрицей A, то $\bar{u}+\bar{v}$ является решением первой из этих систем.*

б) *Если $\bar{u}_0$ — некоторое решение системы линейных уравнений с матрицей A, то всякое решение $\bar{u}$ этой системы представляется в виде суммы $\bar{u}_0+\bar{v}$, где $\bar{v}$ — некоторое решение однородной системы линейных уравнений с той же матрицей A.*

Доказательство. Пусть b_i — свободный член i-го уравнения рассматриваемой системы.

а) Если $\bar{u}=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\bar{v}=(\beta_1, \ldots, \beta_n)$, то, подставляя координаты строки $\bar{u}+\bar{v}$ в i-е уравнение рассматриваемой системы, получим

$$a_{i1}(\alpha_1+\beta_1)+\ldots+a_{in}(\alpha_n+\beta_n)=$$
$$=(a_{i1}\alpha_1+\ldots+a_{in}\alpha_n)+(a_{i1}\beta_1+\ldots+a_{in}\beta_n)=$$
$$=b_i+0=b_i,$$

что и требовалось.

б) Если $\bar{u}_0=(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ и $\bar{u}=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, то

$$a_{i1}(\alpha_1-\gamma_1)+\ldots+a_{in}(\alpha_n-\gamma_n)=$$
$$=(a_{i1}\alpha_1+\ldots+a_{in}\alpha_n)-(a_{i1}\gamma_1+\ldots+a_{in}\gamma_n)=$$
$$=b_i-b_i=0.$$

Следовательно, строка $\bar{v}=\bar{u}-\bar{u}_0$ является решением однородной системы с матрицей A, а значит, равенство

$$\bar{u}=\bar{u}_0+(\bar{u}-\bar{u}_0)=\bar{u}_0+\bar{v}$$

дает искомое представление.

Из теоремы 5.5 вытекает, что для описания множества всех решений произвольной системы линейных уравнений с матрицей A следует найти какое-нибудь решение этой системы и прибавлять к нему произвольные линейные комбинации описанной в теореме 5.3 системы решений однородной системы с той же матрицей A. В качестве примера рассмотрим систему

$$x_1+x_2+x_3+x_4=4,$$
$$x_1+x_2-x_3+x_4=2.$$

Ясно, что строка $(1, 1, 1, 1)$ — решение этой системы. Поэтому любое решение имеет вид

$$(1, 1, 1, 1)+\alpha(1, 0, 0, -1)+\beta(0, 1, 0, -1)$$

или, что то же самое,

$$(1+\alpha,\ 1+\beta,\ 1,\ 1-\alpha-\beta),$$

где α и β — произвольные действительные числа.

Упражнения

1. Какие неизвестные в системах линейных уравнений из упр. 1 и 2 в § 3 можно объявить главными?

2. Доказать, что совместная система линейных уравнений от n неизвестных имеет единственное решение тогда и только тогда, когда ранг матрицы этой системы равен n.

3. Если система n линейных уравнений с $n-1$ неизвестными совместна, то расширенная матрица этой системы — вырожденная.

4. Найти описанную в теореме 5.3 систему решений для систем линейных уравнений из упр. 1 з) — л) в § 3.

5. Найти описанную в теореме 5.3 систему решений для системы линейных уравнений, решающей упр. 1 е) из § 1.

6. Описать решения систем линейных уравнений из упр. 1 а) — д) в § 3 способом, указанным в конце настоящего параграфа.

7. То же, что и в упр. 7, для систем линейных уравнений, дающих решение упр. 1 а), б) и д) в § 1.

8. Пусть $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_r$ — решения некоторой неоднородной системы линейных уравнений. Доказать, что строка $\lambda_1\bar{u}_1+\ldots+\lambda_r\bar{u}_r$ является решением той же системы тогда и только тогда, когда $\lambda_1+\ldots+\lambda_r=1$.

§ 6. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ РЕШЕНИЙ

Как уже говорилось, теорема 5.3 показывает, что все решения однородной системы линейных уравнений можно получить, составляя линейные комбинации некоторого конечного множества решений. Естественно спросить: как узнать, можно ли из данной системы решений получить таким образом все решения? Получить ответ на этот вопрос — цель настоящего параграфа.

Рангом системы $\{\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_m\}$ строк длины n назовем ранг $(m\times n)$-матрицы, составленной из строк этой системы. Например, ранг системы строк

$$\{(1, 1, 1, 1, 4),\ (1, 1, 2, 0, 4),\ (1, 1, 0, 2, 4),\ (1, 1, -1, 3, 4)\}$$

равен рангу матрицы

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 3 & 4 \end{Vmatrix},$$

т. е., как отмечено на с. 34, двум.

Установим несколько вспомогательных фактов. Напомним, что строка $\bar{v}$ является, по определению, *линейной комбинацией* строк $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_m$, если $\bar{v} = \lambda_1\bar{u}_1 + \ldots + \lambda_m\bar{u}_m$ для некоторых действительных чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. В этом случае говорят также, что строка $\bar{v}$ *линейно выражается* через строки $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_m$. Например, строка $\bar{w} = (3, 1, 2, 2)$ линейно выражается через строки $\bar{u} = (1, 2, 1, 2)$ и $\bar{v} = (-1, 3, 0, 2)$, поскольку $\bar{w} = 2\bar{u} + (-1)\bar{v}$.

Теорема 6.1. *Если строка $\bar{w}$ линейно выражается через строки $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_s$, а каждая из строк $\bar{u}_i$ линейно выражается через строки $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_t$, то строка $\bar{w}$ линейно выражается через строки $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_t$.*

Доказательство. По условию имеем

$$\bar{w} = \lambda_1\bar{u}_1 + \ldots + \lambda_s\bar{u}_s$$

и

$$\bar{u}_i = \mu_{i1}\bar{v}_1 + \ldots + \mu_{it}\bar{v}_t$$

для подходящих действительных чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_s, \mu_{i1}, \ldots, \mu_{it}$. Отсюда, принимая во внимание теоремы 2.1 и 2.2, получаем

$$\begin{aligned}
\bar{w} = {} & \lambda_1(\mu_{11}\bar{v}_1 + \mu_{12}\bar{v}_2 + \ldots + \mu_{1t}\bar{v}_t) + \\
& + \lambda_2(\mu_{21}\bar{v}_1 + \mu_{22}\bar{v}_2 + \ldots + \mu_{2t}\bar{v}_t) + \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \lambda_s(\mu_{s1}\bar{v}_1 + \mu_{s2}\bar{v}_2 + \ldots + \mu_{st}\bar{v}_t) = \\
= {} & (\lambda_1\mu_{11} + \lambda_2\mu_{21} + \ldots + \lambda_s\mu_{s1})\bar{v}_1 + \\
& + (\lambda_1\mu_{12} + \lambda_2\mu_{22} + \ldots + \lambda_s\mu_{s2})\bar{v}_2 + \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + (\lambda_1\mu_{1t} + \lambda_2\mu_{2t} + \ldots + \lambda_s\mu_{st})\bar{v}_t,
\end{aligned}$$

что и требовалось.

Теорема 6.2. *Пусть*

$$W = \begin{Vmatrix} u_{11} & \ldots & u_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{s1} & \ldots & u_{sn} \\ v_{11} & \ldots & v_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ v_{t1} & \ldots & v_{tn} \end{Vmatrix}.$$

Тогда (ранг U) $\leqslant$ (ранг W). *Если же строки матрицы V линейно выражаются через строки матрицы U, то* (ранг W) = (ранг U).

Доказательство. Для доказательства первого утверждения достаточно заметить, что всякая невырожденная подматрица матрицы U является невырожденной подматрицей матрицы W. Следовательно, наивысший порядок таких подматриц у матрицы U не может быть выше, чем у матрицы W. В силу определения ранга матрицы это и означает, что (ранг U) $\leqslant$ (ранг W). Переходя к доказательству второго утверждения, положим $\bar{u}_i = (u_{i1}, \ldots, u_{in})$ и $\bar{v}_j = (v_{j1}, \ldots, v_{jn})$. По условию

$$\bar{v}_j = \lambda_{j1}\bar{u}_1 + \ldots + \lambda_{js}\bar{u}_s$$

для подходящих действительных чисел $\lambda_{j1}, \ldots, \lambda_{js}$. Вычитая из $(s+1)$-й строки матрицы W ее первые s строк, умноженные на $\lambda_{11}, \lambda_{12}, \ldots, \lambda_{1s}$ соответственно, превратим ее в нулевую. Аналогично поступая с последующими строками матрицы W, придем к матрице

$$T = \begin{Vmatrix} u_{11} & \ldots & u_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{s1} & \ldots & u_{sn} \\ 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix}.$$

По теореме 4.6 (ранг T) = (ранг W). Приведя матрицу U к ступенчатому виду S, что возможно в силу теоремы 2.6, заметим, что те же самые элементарные преобразования превращают матрицу T в ступенчатую матрицу $\begin{Vmatrix} S \\ O \end{Vmatrix}$, где O — нулевая $(t \times n)$-матрица. В силу теорем 4.5 и 4.6 (ранг W) = (ранг T) = ранг $\begin{Vmatrix} S \\ O \end{Vmatrix}$ = (ранг S) = (ранг U).

Теорема 6.3. *Если от матрицы U к матрице V можно перейти конечным числом элементарных преобразований строк, то каждая из строк матрицы V линейно выражается через строки матрицы U.*

Доказательство. В случае применения одного элементарного преобразования справедливость теоремы вытекает из определения. В общем случае мы имеем последовательность матриц $U, W_1, W_2, \ldots, W_k, V$, где от левой матрицы к правой можно перейти, используя одно элементарное преобразование. Следовательно, как уже отмечено, каждая строка правой матрицы линейно выражается через строки левой. Остается лишь несколько раз применить теорему 6.1.

Теорема 6.4. *Если каждая строка системы* Ω *линейно выражается через строки системы* Ξ, *то* (ранг Ω) $\leqslant$ $\leqslant$ (ранг Ξ).

Доказательство. Если U и V — матрицы, составленные из строк систем Ξ и Ω соответственно, то, используя теорему 6.2, получим

$$(\text{ранг } \Omega) = (\text{ранг } V) \leqslant \left(\text{ранг } \left\|\begin{matrix} U \\ V \end{matrix}\right\|\right) = (\text{ранг } U) = (\text{ранг } \Xi).$$

Теорема 6.5. *Если* $\Xi = \{\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_m\}$ — *система строк длины* n *и* (ранг Ξ) $< m$, *то хотя бы одна из строк системы* Ξ *линейно выражается через остальные.*

Доказательство. Пусть $\bar{u}_i = (u_{i1}, \ldots, u_{in})$ и U — матрица, составленная из строк системы Ξ. По условию (ранг U) $= r < m$. Пусть $i_1, \ldots, i_r$ — номера строк, в которых располагается невырожденная подматрица матрицы U порядка r, и V — $(r \times n)$-матрица, составленная из этих строк. Воспользовавшись теоремой 2.6, приведем матрицу V к ступенчатому виду S. Применив те же самые элементарные преобразования к матрице U и переместив строки, в которых располагалась матрица V, на первые r мест, получим матрицу $W' = \left\|\begin{matrix} S \\ T' \end{matrix}\right\|$, где T' — $((m-r) \times n)$-матрица, составленная из строк матрицы U, не вошедших в матрицу V. В силу теорем 4.5 и 4.6 все строки ступенчатой матрицы S отличны от нулевой. Допустим, что лидеры ее строк расположены в столбцах с номерами $j_1, \ldots, j_r$, т. е.

$$W' = \left\| \begin{matrix} \ldots & s_{1j_1} & \ldots & s_{1j_2} & \ldots & s_{1j_r} & \ldots \\ \ldots & 0 & \ldots & s_{2j_2} & \ldots & s_{2j_r} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & s_{rj_r} & \ldots \\ \ldots & t'_{1j_1} & \ldots & t'_{2j_2} & \ldots & t'_{rj_r} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & t'_{n-r\,j_1} & \ldots & t'_{n-r\,j_2} & \ldots & t'_{n-r\,j_r} & \ldots \end{matrix} \right\|,$$

причем $s_{1j_1}, s_{2j_2}, \ldots, s_{rj_r} \neq 0$. Воспользовавшись несколько раз теоремой 2.3, можно от матрицы W' перейти с помощью элементарных преобразований к матрице $W = \left\|\begin{matrix} S \\ T \end{matrix}\right\|$, где все элементы матрицы T, располагающиеся в столбцах с номерами $j_1, \ldots, j_r$, равны нулю. Убедимся,

что все строки матрицы T — нулевые. Действительно, допустим, что $t_{pq} \neq 0$ для некоторых p и q. Конечно, $q \neq j_1, \ldots, j_r$. Рассмотрим подматрицу M матрицы W, расположенную в строках с номерами $1, 2, \ldots, r, p$ и в столбцах с номерами $j_1, \ldots, j_r, q$. Возможны следующие три случая: $1/q < j_1$; $2/j_n < q < j_{n+1}$ для некоторого h; $3/j_r < q$. Переставляя, если необходимо, строки матрицы M, приходим к матрице M', равной

$$\begin{Vmatrix} t_{pq} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ s_{1q} & s_{1j_1} & s_{1j_2} & \ldots & s_{1j_r} \\ s_{2q} & 0 & s_{2i_2} & \ldots & s_{2j_r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{rq} & 0 & 0 & \ldots & s_{rj_r} \end{Vmatrix},$$

$$\begin{Vmatrix} s_{1j_1} & \ldots & s_{1j_h} & s_{1q} & s_{1j_{h+1}} & \ldots & s_{1j_r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & s_{hj_n} & s_{hq} & s_{hj_{h+1}} & \ldots & s_{hj_r} \\ 0 & \ldots & 0 & t_{pq} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & s_{h+1q} & s_{h+1j_{h+1}} & \ldots & s_{h+1j_r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & s_{rq} & 0 & \ldots & s_{rj_r} \end{Vmatrix}$$

или

$$\begin{Vmatrix} s_{1j_1} & s_{1j_2} & \ldots & s_{1j_r} & s_{1q} \\ 0 & s_{2j_2} & \ldots & s_{2j_r} & s_{2q} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & s_{rj_r} & s_{rq} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & t_{pq} \end{Vmatrix}$$

соответственно. Поскольку $s_{1j_1}, s_{2j_2}, \ldots, s_{rj_r}, t_{pq} \neq 0$, то в третьем случае матрица M' сразу оказывается ступенчатой. В первых же двух случаях ее можно превратить в ступенчатую с помощью элементарных преобразований второго типа, обратив в нуль элементы $s_{1q}, s_{2q}, \ldots, s_{rq}$ и $s_{h+1\,q}, \ldots, s_{r\,q}$ соответственно (см. теорему 2.3). В силу теорем 4.5, 4.6 и 6.2 получаем

$$r+1 = (\text{ранг } M') = (\text{ранг } M) \leqslant (\text{ранг } W) = \\ = (\text{ранг } W') = (\text{ранг } U) = r.$$

Возникающее противоречие показывает, что $W = \begin{Vmatrix} S \\ O \end{Vmatrix}$, где O — нулевая $((m-r) \times n)$-матрица. В силу тео-

рем 2.4 и 6.3 строки матрицы S линейно выражаются через строки матрицы V, а строки матрицы U — через строки матрицы W или, что то же самое, через строки матрицы S. Отсюда, воспользовавшись теоремой 6.1, заключаем, что строки матрицы U, не входящие в матрицу V, линейно выражаются через строки матрицы V, чем и завершается доказательство.

Семейство F решений однородной системы линейных уравнений называется *фундаментальной системой решений*, если всякое решение этой системы является линейной комбинацией решений из системы F, но при выбрасывании из F хотя бы одной строки оставшееся семейство уже не обладает этим свойством. В силу теоремы 5.4 семейство решений, рассмотренное в теореме 5.3, является фундаментальной системой решений. Существуют и другие фундаментальные системы решений.

В качестве примера рассмотрим систему

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,$$
$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0.$$

Согласно теореме 5.2 можно объявить свободными неизвестные x_1 и x_4. Поэтому из теоремы 5.3 вытекает, что решения $(1, -1, 0, 0)$ и $(0, -1, 0, 1)$ образуют фундаментальную систему решений. Фундаментальной системой решений является и семейство $\{(1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, -1)\}$. Оно возникает, если свободными объявить неизвестные x_1 и x_2. Исходя из первой фундаментальной системы, получаем, что совокупность всех решений системы (5.2) состоит из строк вида

$$(\alpha, -(\alpha + \beta), 0, \beta),$$

где α и β — произвольные действительные числа. Вторая фундаментальная система дает нам совокупность строк вида

$$(\alpha, \beta, 0, -(\alpha + \beta)).$$

Нетрудно сообразить, что, как и следовало ожидать, мы получаем одно и то же множество.

Теорема 6.6. *Каждая фундаментальная система решений системы линейных однородных уравнений от n неизвестных с матрицей системы, имеющей ранг r, содержит $n - r$ решений, и ее ранг равен $n - r$.*

Доказательство. Согласно теореме 5.2 какие-то $n - r$ неизвестных нашей системы линейных уравнений

можно объявить свободными, и, следовательно, существует система решений $\Xi = \{\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_{n-r}\}$, описанная в теореме 5.3. Пусть U — $((n-r)\times n)$-матрица, составленная из этих решений. Столбцы матрицы U с номерами $i_1, \ldots, i_{n-r}$ образуют подматрицу E, являющуюся единичной матрицей порядка $n-r$. В силу теорем 4.5 и 6.2

$$n-r = (\text{ранг } E) \leqslant (\text{ранг } U) \leqslant n-r,$$

откуда

$$(\text{ранг } \Xi) = (\text{ранг } U) = n-r.$$

Пусть теперь F — произвольная фундаментальная система решений рассматриваемой системы линейных уравнений и s — число решений, входящих в F. По теореме 5.4 $s \geqslant n-r$. Если $s > n-r$, то в силу теорем 6.1 и 6.5 все решения нашей системы линейно выражаются через часть решений системы F, что противоречит ее фундаментальности. Наконец, дважды применив теорему 6.4, получим

$$(\text{ранг } \Xi) \leqslant (\text{ранг } F) \leqslant (\text{ранг } \Xi),$$

откуда в силу доказанного выше

$$(\text{ранг } F) = (\text{ранг } \Xi) = n-r.$$

Поставленную в начале параграфа задачу решает следующее утверждение.

Теорема 6.7. *Если F — система решений однородной системы линейных уравнений от n неизвестных с матрицей ранга r, содержащая $n-r$ решений, и ранг системы F равен $n-r$, то F — фундаментальная система решений.*

Доказательство. Допустим, что существует решение $\bar{v}$, не являющееся линейной комбинацией решений из F. Рассмотрим систему решений $\bar{F}$, полученную присоединением к F решения $\bar{v}$. Поскольку из теорем 5.3 и 6.6 вытекает, что рассматриваемая система линейных уравнений обладает фундаментальной системой решений ранга $n-r$, то в силу теорем 6.2 и 6.4 (ранг $\bar{F}$) $= n-r$. Но тогда из теоремы 6.5 и выбора решения $\bar{v}$ следует существование такого решения $\bar{u} \in F$, что

$$\bar{u} = \lambda_1\bar{u}_1 + \ldots + \lambda_s\bar{u}_s + \mu\bar{v},$$

где $\bar{u} \neq \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_s \in F$. Если $\mu = 0$, то в силу теоремы 6.4 (ранг F) $\leq n-r$ вопреки условию. Если же

$\mu \neq 0$, то, принимая во внимание теоремы 2.1 и 2.2, получам

$$\bar{v} = \mu^{-1}\bar{u} - \mu^{-1}\lambda_1\bar{u}_1 - \ldots - \mu^{-1}\lambda_s\bar{u}_s,$$

что противоречит выбору решения $\bar{v}$. Таким образом, любое решение рассматриваемой системы линейных уравнений линейно выражается через F. Если того же самого можно достичь, используя часть системы F, то, учитывая теоремы 6.1 и 6.4, приходим к невозможному соотношению

$$n - r = (\text{ранг } F) < n - r,$$

что и доказывает фундаментальность системы F.

В качестве примера применения теоремы 6.7 рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 4x_5 &= 0,\\
x_1 + x_2 + 2x_3 \qquad + 4x_5 &= 0,\\
x_1 + x_2 \qquad + 2x_4 + 4x_5 &= 0,\\
x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 + 4x_5 &= 0.
\end{aligned}$$

Ранг матрицы этой системы равен двум (см. с. 34). Решения (1, 1, 1,1, —1), (0, 2, 1, 1, —1), (0, 0, 2, 2, —1) образует фундаментальную систему решений, поскольку

$$\text{ранг} \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -1 \end{Vmatrix} = 3.$$

Упражнения

1. Найти фундаментальную систему решений системы линейных уравнений

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0,\\
3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 &= 0,\\
x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 &= 0,\\
5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 &= 0.
\end{aligned}$$

2. Будут ли фундаментальными следующие системы решений системы линейных уравнений из упр. 1: а) {(3, —2, —1, —1, 1), (2, 0, —2, —1, 1)}; б) {(3, —2, —1, —1, 1), (1, —2, 1, 0, 0), (2, 0, —2, —1, 1)}; в) {(1, —2, 1, 0, 0), (0, 0, —1, 1, 0), (4, 0, 0, —6, 2)}; г) {(1, —2, 1, 0, 0), (1, —2, 0, 1, 0), (0, 0, 1, —1, 0), (1, —2, 3, —2, 0)}?

3. Найти фундаментальную систему решений системы линейных уравнений:

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 b_1 x_1 + \ldots + \lambda_n b_1 x_n + a_1 x_{n+1} = 0,\\
&\lambda_1 b_2 x_1 + \ldots + \lambda_n b_2 x_n + a_2 x_{n+1} = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\lambda_1 b_m x_1 + \ldots + \lambda_n b_m x_n + a_m x_{n+1} = 0.
\end{aligned}$$

Указание: предварительно доказать, что $\left(\text{ранг}\begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix}\right) = 2$ тогда и только тогда, когда $ad - bc \neq 0$.

4. Найти систему однородных линейных уравнений, для которой фундаментальную систему решений образуют строки: а) (1, 2, —1, 0, 1) и (1, 3, 1, 1, 2); б) (2, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0) и (—1, 0, 0, 1); в) (1, 2, 3, —1).

5. Пусть A^* — матрица, строками которой служат столбцы матрицы A. Доказать:

а) если A — вырожденная матрица, то матрица A^* — также вырожденная. Указание: воспользоваться теоремой 6.4 и упр. 10 в § 4;

б) (ранг A) = (ранг A^*). Указание: использовать а).

6. Доказать, что ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях столбцов I и II типов. Используется ли ранг матрицы при элементарных преобразованиях III типа?

ОТВЕТЫ

§ 1

1. а)
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 40,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 20;$$

б)
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20,$$
$$5x_1 + 10x_2 + 15x_3 + 20x_4 = 200;$$

в)
$$x_1 + x_2 + x_3 = 1,$$
$$x_1 + x_2 + x_4 = 1,$$
$$x_1 + x_3 + x_4 = 1,$$
$$x_2 + x_3 + x_4 = 1;$$

г)
$$x_1 + x_2 = 1,$$
$$x_1 + x_3 = 1,$$
$$x_1 + x_4 = 1,$$
$$x_2 + x_3 = 1,$$
$$x_2 + x_4 = 1,$$
$$x_3 + x_4 = 1;$$

д)
$$20x_1 + 12x_2 + 10x_4 = 120,$$
$$20x_1 + 15x_3 + 10x_4 = 120,$$
$$12x_2 + 15x_3 + 10x_4 = 120;$$

е)
$$x_1 + x_2 = 0,$$
$$x_2 + x_3 = 0,$$
$$\dots\dots\dots$$
$$x_{n-1} + x_n = 0,$$
$$x_1 + x_n = 0.$$

§ 2

1. Например, $\bar{a} = (0, 1, 2, 0)$, $\bar{b} = (0, -1, -1, 2)$. **2.** $(0, -3, 3, 2, 2)$. **5.** $\bar{x} = (0, 1, 2, -2)$, $\bar{y} = (20/3, -25/3, 10/3, -5/3)$. **6.** а) $(1, 4, -7, 7)$.

7. а) $\left\|\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 40 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -20 \end{matrix}\right\|$; б) $\left\|\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & 5 & 10 & 15 & 100 \end{matrix}\right\|$;

в) $\left\|\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{matrix}\right\|$; г) $\left\|\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right\|$;

д) $\begin{Vmatrix} 20 & 12 & 0 & 10 & 120 \\ 0 & -12 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 10 & 120 \end{Vmatrix}$;

е) при четном n $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$,

при нечетном n $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix}$.

Замечание. Ответы в упр. 7 а)—е) могут быть другими. Однако лидеры должны располагаться в тех же самых столбцах (см. упр. 13). 9. Например, $\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$.

§ 3

1. а) $x_1 = \frac{1}{4}(8 - x_3 - 9x_4)$, $x_2 = -\frac{1}{4}(5x_3 + x_4)$; б) $x_1 = \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}$, $x_3 = x_4 = 0$; в) система несовместна; г) $x_1 = \frac{1}{4}(1 - 3x_2 - x_3)$, $x_4 = 1$; д) $x_1 = -\frac{1}{12}(7 - 18x_2 + x_4)$, $x_3 = \frac{1}{6}(1 - 5x_4)$; е) $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$; ж) $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$; з) $x_1 = x_4 - x_5$, $x_2 = x_4 - x_6$, $x_3 = x_4$; и) $x_1 = x_4 = 0$, $x_2 = \frac{1}{3}(x_3 - 2x_5)$; к) $x_1 = -3x_3 - 5x_5$, $x_2 = 2x_3 + 3x_5$, $x_4 = 0$; л) если $n = 3k$ или $n = 3k + 1$, то только нулевое решение, если же $n = 3k + 2$, то

$$x_i = \begin{cases} 0, & \text{если } i = 3m, \\ -x_n, & \text{если } i = 3m + 1, \\ x_n, & \text{если } i = 3m + 2. \end{cases}$$

Замечание. Ответы к упр. 1 а), б), г), д), з), и), к) и л) при $n = 3k + 2$ допускают и другую запись.

2. а) Одна из сторон равна 10 см, а сумма остальных — 30 м. Например, 8 м, 15 м, 7 м и 10 м. б) Если x_1 — число 5-копеечных,

x_2 — число 10-копеечных, x_3 — число 15-копеечных и x_4 — число 20-копеечных монет, то $x_1 = x_3 + 2x_4$ и $x_2 = 20 - 2x_3 - 3x_4$. Одно из решений — (7, 8, 3, 2). При максимальном числе 20-копеечных монет имеем (12, 2, 0, 6) или (13, 0, 1, 6), а при максимальном числе 15-копеечных — (10, 0, 10, 0). в) $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1/3$. г) $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1/2$. д) Если x_1, x_2, x_3, x_4 — число ежедневных рабочих часов бетономешалок производительностью 20, 12, 15 и 10 тонн в час соответственно, то $x_1 = \frac{1}{4}(12 - x_4)$, $x_2 = \frac{1}{12}(60 - 5x_4)$, $x_3 = \frac{1}{3}(12 - x_4)$. Одно из решений — (5/2, 25/6, 10/3, 2). При максимальном использовании четвертой бетономешалки имеем (1/4, 5/12, 1/3, 11), а при минимальном — (11/4, 55/12, 11/3, 1). е) Если n нечетное, то все числа равны нулю, а при четном n все они равны по абсолютной величине, причем половина из них больше или равна нулю, а остальные меньше и равны нулю.

4. Одна из систем: $\begin{aligned} -2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1, \\ -2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0. \end{aligned}$

7. Нет: число решений одно или бесконечно.

§ 4

1. а) 2; б) 2; в) 4; г) 4; д) 3; е) $n-1$ при четном n и n при нечетном n. **2.** а) 2; б) 3; в) 6; г) 5; д) если $a_1 = \ldots = a_n$, то ранг равен нулю при $a_1 = -b_1 = \ldots = -b_n$ и 1 в противном случае; если же существует $a_i \neq a_1$, то ранг равен 1 при $b_1 = \ldots = b_n$ и 2 в противном случае.

§ 5

1. Для упр. 1 в § 3: а) любые два; б) x_1, x_3, x_4 или x_2, x_3, x_4; в) система несовместна; г) x_1 и x_4, или x_2 и x_4, или x_3 и x_4; д) x_1 и x_3, или x_1 и x_4, или x_2 и x_3, или x_2 и x_4, или x_3 и x_4; е) все; ж) все; з) x_1, x_2, x_3, или x_1, x_2, x_4, или x_2, x_3, x_5, или x_2, x_4, x_5, или x_3, x_5, x_6, или x_4, x_5, x_6; и) x_1, x_2, x_4, или x_1, x_3, x_4, или x_1, x_4, x_5; к) любые три, среди которых встречается x_4; л) если $n = 3k$ или $3k+1$, то все, если $n = 3k+2$, то x_3, x_6, ..., x_{3k} и любые $k+1$ из оставшихся. Для упр. 2 в § 3: а) x_1 и x_4, или x_2 и x_4, или x_3 и x_4; б) любые два; в) все; г) все; д) любые три; е) если n нечетное, то все, если n четное, то любые $n-1$;

4. Для упр. 1 в § 3: з) (1, 1, 1, 1, 0, 0), (—1, 0, 0, 0, 1, 0), (0, —1, 0, 0, 0, 1); и) (0, 1, 3, 0, 0), (0, —2, 0, 0, 3); к) (—3, 2, 1, 0, 0), (—5, 3, 0, 0, 1); л) если $n = 3k$ или $3k+1$, то имеется только нулевое решение, если $n = 3k+2$, то (—1, 1, 0, —1, 1, 0, ..., —1, 1, 0, —1, 1).

5. Если n нечетное, то имеется лишь нулевое решение. Если n четное, то (1, —1, 1, —1, ..., —1, 1, —1).

Замечание. Ответы в упр. 4 и 5 могут быть и другими, но число строк, входящих в найденную систему решений, должно совпадать с числом строк, указанных в приведенных ответах.

6. а) $(2, 0, 0, 0) + \lambda(-1, -5, 4, 0) + \mu(-9, -1, 0, 4)$; б) $(-1, -1, 0, 0) + \lambda(2, 3, 0, 0)$; в) система не совместна; г) $(1, -1, 0, 1) + \lambda(-3, 4, 0, 0) + \mu(-1, 0, 4, 0)$; д) $(1, 1, 1, -1) + \lambda(-1, 0, -10, 12) + \mu(3, 2, 0, 0)$.

7. а) $(10, 10, 10, 10) + \lambda(-1, 0, 1, 0) + \mu(0, -1, 1, 0)$; б) $(7, 8, 3, 2) + \lambda(1, -2, 1, 0) + \mu(2, -3, 0, 1)$; д) $(0, 0, 0, 12) + \lambda(3, 5, 4, -12)$.

Замечание. Ответы в упр. 6 и 7 могут быть и другими, но число строк, входящих в ответ, должно быть тем же самым.

§ 6.

1. Например, $\{(1, -2, 1, 0, 0), (1, -2, 0, 1, 0), (5, -6, 0, 0, 1)\}$.

2. а) нет; б) нет; в) да; г) нет.

3. Если все коэффициенты равны нулю, то $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$, где $\bar{e}_i = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-1}, 1, 0, \ldots, 0)$; если существуют ненулевые коэффициенты, но $\lambda_i a_j b_k - \lambda_i a_k b_j = 0$ для всех i, j, k, что $\{a_j\bar{e}_1 - \lambda_1 b_j e_{n+1}, a_j\bar{e}_2 - \lambda_2 b_j \bar{e}_{n+1}, \ldots, a_j\bar{e}_n - \lambda_n b_j \bar{e}_{n+1}$ в случае, когда $a_j \neq 0$, и $\{\lambda_i b_k \bar{e}_1 - \lambda_1 b_k \bar{e}_i, \ldots, \lambda_i b_k \bar{e}_{i-1} - \lambda_{i-1} b_k \bar{e}_i, \lambda_i b_k \bar{e}_{i+1} - \lambda_{i+1} b_k \bar{e}_i, \ldots, \lambda_i b_k \bar{e}_n - \lambda_n b_k \bar{e}_i, \bar{e}_{n+1}\}$ в случае, когда $a_1 = \ldots = a_m = 0$, но $\lambda_i b_k \neq 0$; если $\Delta = \lambda_i a_j b_k - \lambda_i a_k b_j \neq 0$ для некоторых i, j, k, то $\{\Delta\bar{e}_1 + \lambda_1\omega\bar{e}_i, \ldots, \Delta\bar{e}_{i-1} + \lambda_{i-1}\omega\bar{e}_i, \Delta\bar{e}_{i+1} + \lambda_{i+1}\omega\bar{e}_i, \ldots, \Delta\bar{e}_n + \lambda_n\omega\bar{e}_i$, где $\omega = a_k b_j - a_j b_k$.

4. а)
$$\begin{aligned} 8x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0, \\ x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 &= 0, \\ x_3 - 3x_4 + x_5 &= 0; \end{aligned}$$

б)
$$x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0;$$

в)
$$\begin{aligned} -5x_1 + x_2 + x_3 &= 0, \\ x_2 + x_3 + 5x_4 &= 0, \\ x_3 + 3x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Замечание. Ответы могут быть и другими, но ранг найденных систем должен совпадать с рангом приведенных.

РЕШЕНИЯ

§ 2

7. е) К последней строке данной матрицы прибавим все предыдущие четные строки и все предыдущие нечетные строки, умноженные на -1. Тогда для четного и нечетного n получаем ступенчатые матрицы

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix}.$$

11. При $a \neq 0$ задача решается последовательным получением следующей цепочки матриц:

$$\begin{Vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} a & 0 \\ a & b \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} a & 0 \\ a+1 & b \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} a & -ab \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 0 & -ab \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -ab \end{Vmatrix}.$$

12. Следует заметить, что при выполнении одного элементарного преобразования каждая строка новой матрицы является линейной комбинацией строк данной матрицы, после чего нужное число раз воспользоваться упр. 6 б).

13. Пусть $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_r$ и $\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_s$ — ненулевые строки матриц B и C соответственно. Допустим, что лидеры этих строк располагаются в столбцах с номерами $k_1, \dots, k_r$ и $l_1, \dots, l_s$, где $k_1 < \dots < k_r$ и $l_1 < \dots < l_s$. Из теоремы 2.4 вытекает, что как от B к C, так и от C к B можно перейти с помощью элементарных преобразований. Согласно упр. 12 каждая из строк $\bar{b}_i$ является линейной комбинацией строк $\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_s$, а каждая из строк $\bar{c}_j$ — линейной комбинацией строк $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_r$. Отсюда видно, что $k_1 = l_1$. Если, далее, $\bar{b}_2 = \xi_1\bar{c}_1 + \dots + \xi_s\bar{c}_s$ и $\bar{c}_2 = \eta_1\bar{b}_1 + \dots + \eta_r\bar{b}_r$, то $\xi_1 = 0 = \eta_1$, и, как и выше, убеждаемся, что $k_2 = l_2$. Аналогично, рассматривая выражения для $\bar{b}_3$ и $\bar{c}_3$, убедимся, что $k_3 = l_3$. Если $r \leqslant s$, то, про-

должая этот процесс, придем к $k_i = l_i$, где $1 \leqslant i \leqslant r$. При $r < s$ из равенства $\bar{c}_{r+1} = \zeta_1 \bar{b}_1 + \ldots + \zeta_r \bar{b}_r$ выводим, что $\zeta_1 = \ldots = \zeta_r = 0$. Отсюда $\bar{0} \neq \bar{c}_{r+1} = \bar{0}$, что невозможно. Случай, когда $s \leqslant r$, рассматривается аналогично.

§ 3

1. *л*) Матрица системы имеет вид

$$\left\|\begin{array}{ccc|cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \multicolumn{11}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right\|.$$

Вычтем из второй строки первую, переместим вторую строку на третье место и вычтем ее из четвертой. Тогда получится матрица

$$\left\|\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ \ldots \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \ \ldots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \ \ldots \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \ \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \ \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \ \ldots \\ \hline \multicolumn{7}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \end{array}\right\|.$$

Теперь вычтем из пятой строки четвертую, переместим пятую строку на шестое место и вычтем ее из седьмой строки. В результате возникает матрица

$$\left\|\begin{array}{ccc|ccc|ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ \ldots \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ \ldots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ \ldots \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \ \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \ \ldots \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \ \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \ \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \ \ldots \\ \hline \multicolumn{10}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \end{array}\right\|.$$

Далее, из восьмой строки вычитаем седьмую, перемещаем восьмую строку на девятое место и вычитаем ее из десятой. Продолжая этот

процесс, при $n = 3k$, $3k+2$ или $3k+1$ соответственно приходим к матрицам

$$\left\|\begin{array}{ccc|ccc} & B & & & O & \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right\|, \quad \left\|\begin{array}{ccc|cc} & B & & & O \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{array}\right\|$$

или

$$\left\|\begin{array}{ccc|c} & B & & O \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right\|,$$

где O — нулевая матрица, а

$$B = \left\|\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \multicolumn{12}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right\|.$$

В первых двух случаях после очевидных элементарных преобразований получаем

$$\left\|\begin{array}{ccc|ccc} & B & & & O & \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right\| \text{ и } \left\|\begin{array}{ccc|cc} & B & & & O \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\|$$

соответственно. Теперь ясно, что в первом и третьем случаях система обладает только нулевым решением. Во втором случае получаем $x_{3l} = 0$ и $x_{3l+2} = -x_{3l+1} = x_n$ (заметим, что $n = 3k+2$).

5. Если строка $\bar{b}$, о которой идет речь, представляется в виде $\bar{b} = \lambda_1\bar{b}_1 + \dots + \lambda_n\bar{b}_n$, где $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n$ — остальные строки, то, прибавив к $\bar{b}$ линейную комбинацию $-\lambda_1\bar{b}_1 - \dots - \lambda_n\bar{b}_n$, превратим эту строку в нулевую. Остается воспользоваться теоремами 1.1 и 3.2.

6. Расширенная матрица должна быть нулевой. Достаточность этого условия очевидна. Для доказательства необходимости следует воспользоваться тем, что строки $\bar{0}$ и $\bar{e}_i = (\underbrace{0, \dots, 0}_{i-1}, 1, 0, \dots, 0)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ являются решениями.

§ 4

2. д) От данной матрицы с помощью элементарных преобразований легко перейти к матрице

$$\begin{Vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \dots & a_1+b_n \\ a_2-a_1 & a_2-a_1 & \dots & a_2-a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n-a_1 & a_n-a_1 & \dots & a_n-a_1 \end{Vmatrix}.$$

Если $a_1 = \dots = a_n$, то все строки, кроме первой, нулевые, и ранг равен 0 или 1 в зависимости от того, является ли первая строка нулевой или нет. Если $a_i \neq a_1$ для некоторого i, то i-я строка отлична от нулевой. Очевидными элементарными преобразованиями рассматриваемая матрица превращается в

$$\begin{Vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \dots & a_1+b_n \\ a_i-a_1 & a_i-a_1 & \dots & a_i-a_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix}.$$

Прибавив к первой строке вторую, умноженную на $-\dfrac{a_1+b_1}{a_i-a_1}$, при $b_1 = \dots = b_n$ получим матрицу с единственной ненулевой строкой, а в противном случае, переменив местами первые две строки, придем к ступенчатой матрице с двумя ненулевыми строками.

5. Если к каждой строке матрицы A прибавить соответствующую строку матрицы B, то получится матрица C, совпадающая с матрицей, стоящей в левой части доказываемого неравенства. Поэтому, учитывая теорему 4.6 и упр. 3, получаем

$$(\text{ранг } C) \leqslant \left(\text{ранг } \left\|\begin{matrix} C \\ B \end{matrix}\right\|\right) = \left(\text{ранг } \left\|\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}\right\|\right) \leqslant$$

$$\leqslant (\text{ранг } A) + (\text{ранг } B).$$

10. Достаточно заметить, что если i-й столбец является линейной комбинацией остальных с коэффициентами $\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_n$, то строка $(\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, -1, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_n)$ служит ненулевым решением однородной системы линейных уравнений с матрицей A, и принять во внимание теорему 4.1.

§ 5

3. Если расширенная матрица системы линейных уравнений окажется невырожденной, то ранг этой матрицы равен n, в то время как ранг матрицы системы не превосходит $n-1$, что в силу теоремы 5.1 влечет несовместимость рассматриваемой системы линейных уравнений.

3. Если $ab - cd \neq 0$, то при $a \neq 0$ от $\begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix}$ достаточно перейти к $\begin{Vmatrix} a & b \\ 0 & d - \frac{bc}{a} \end{Vmatrix}$, прибавив ко второй строке первую, умноженную на $-\frac{c}{a}$, и заметить, что $d - \frac{bc}{a} \neq 0$. Если же $a = 0$, то $c \neq 0$ и можно поступить аналогично. Наоборот, если ранг $\begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix} = 2$, то $a \neq 0$ или $c \neq 0$. При $a \neq 0$, сделав тот же переход, что и выше, получаем $d - \frac{bc}{a} \neq 0$, откуда $ad - bc \neq 0$. При $c \neq 0$ поступаем аналогично.

6. Поскольку элементарным преобразованиям столбцов матрицы A соответствуют элементарные преобразования строк матрицы A^*, то достаточно принять во внимание упр. 9 а) и теорему 4.6.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Вырожденная матрица 28

Главные неизвестные 23 (ср. с. 36, 37)

Диагональная матрица 19

Единичная матрица 12

Квадратная матрица 12
Компонента строки 9
Координата строки 9
Коэффициент 5

Лидер строки 9

Линейная выражаемость строки 45
— комбинация строк 18, 45

Матрица 11
— системы линейных уравнений 20

Нулевая матрица 12
— строка 9

Объявление неизвестных главными 36
— — свободными 37

Однородная система линейных уравнений 25

Подматрица 31
Порядок матрицы 12

Равные матрицы 12
— строки 9
Размер матрицы 12
Ранг матрицы 31
— системы строк 44
Расширенная матрица системы линейных уравнений 20
Решение системы уравнений 7
— уравнения 5

Свободные неизвестные 22 (ср. с. 37)
Свободный член 5
Система линейных уравнений 7
Строка 5
Ступенчатая матрица 14
Сумма строк 9

Умножение строки на число 11

Фундаментальная система решений 49

Эквивалентные системы линейных уравнений 8
Элементарные преобразования строк (столбцов) 12

Лев Анатольевич Скорняков

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Серия «Популярные лекции по математике», выпуск 59

Редактор *В. В. Донченко*
Художественный редактор *Т. Н. Кольченко*
Технический редактор *Е. В. Морозова*
Корректоры *Т. Г. Егорова, О. М. Березина*

ИБ № 12881

Сдано в набор 25.05.85. Подписано к печати 29.12.85. Формат 84×108$^{1}/_{32}$. Бумага тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 3,36. Усл. кр.-отт. 3,47. Уч.-изд. л. 3,42. Тираж 100 000 экз. Заказ № 666. Цена 10 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Ленинградская типография № 2 головное предприятие ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 198052 г. Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

ГОТОВИТСЯ К ПЕЧАТИ:

Штейнгауз Г. **Сто задач:** Пер. с пол. — 4-е изд., испр.— 9 л. — 50 к.

Содержится сто нестандартных задач по элементарной математике. Цель книги — показать школьнику настоящую математику на доступном ему материале. Все задачи снабжены полными решениями.

Для учащихся, интересующихся математикой. Может быть использована в работе школьных математических кружков. Переиздается по просьбе книготорговых организаций.

Заказы на данную книгу принимаются без ограничения всеми книжными магазинами, распространяющими научно-техническую литературу

10 коп. 5 —

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ

Вып. 1. **А. И. Маркушевич.** Возвратные последовательности.
Вып. 2. **И. П. Натаисон.** Простейшие задачи иа максимум и минимум.
Вып. 3. **И. С. Соминский.** Метод математической ииндукции.
Вып. 4. **А. И. Маркушевич.** Замечательные криаые.
Вып. 5. **П. П. Коровкин.** Неравенства.
Вып. 6. **Н. Н. Воробьев.** Числа Фибоначчи.
Вып 7. **А. Г. Курош.** Алгебраические ураанения произвольных степеней.
Вып 8. **А. О. Гельфонд.** Решенне уравнений в целых числах.
Вып. 9. **А. И. Маркушевич.** Площади и логарифмы.
Вып. 10 **А. С. Смогоржевский.** Метод координат.
Вып. 11. **Я. С. Дубнов.** Ошибки в геометрнческих доказательствах.
Вып. 12 **И. П. Натансон.** Суммироаание бескоиечно малых велнчин.
Вып 13. **А. И. Маркушевич.** Комплексные числа и конформные отображения.
Вып. 14. **А. И. Фетисов.** О доказательстаах в геометрнн.
Вып. 15. **И. Р. Шафаревич.** О решении уравненнй аысшнх степенеи.
Вып. 16. **В. Г. Шерватов.** Гиперболическне функции.
Вып 17. **В. Г. Болтянский.** Что такое дифференцирование?
Вып. 18. **Г. М. Миракьян.** Прямой круговой цнлиидр.
Вып. 19. **Л. А. Люстерник.** Кратчайшие линии.
Вып. 20. **А. М. Лопшиц.** Вычнслеине площадей орнентированных фигур.
Вып. 21. **Л. И. Головина и И. М. Яглом.** Индукция в геометрии.
Вып. 22. **В. Г. Болтянский.** Равновеликне и равиосоставленные фигуры.
Вып. 23 **А. С. Смогоржевский.** О геометрии Лобачевского.
Вып. 24 **Б. И. Аргунов и Л. А. Скорняков.** Конфигурацноиные теоремы.
Вып. 25. **А. С. Смогоржевский.** Линейка в геометрнческих построеииях.
Вып. 26. **Б. А. Трахтенброт.** Алгоритмы н машинное рсшение задач.
Вып. 27. **В. А. Успенский.** Некоторые приложеиия механики к математике.
Вып 28. **Н. А. Архангельский н Б. И. Зайцев.** Автоматические цифровые машины.
Вып. 29. **А. Н. Костовский.** Геометрнческие построеиня одним циркулем.
Вып. 30. **Г. Е. Шилов.** Как строить графики.
Вып. 31 **А. Г. Дорфман.** Оптика коинческих сечеинй.
Вып. 32. **Е. С. Вентцель.** Элементы теории игр.
Вып 33 **А. С. Барсов.** Что такое линейное программироаание.
Вып 34. **Б. Е. Маргулис.** Системы линейных уравиений.
Вып. 35 **Н. Я. Вилеикин.** Метод последовательных приблнжений.
Вып. 36 **В. Г. Болтянский.** Огибающая.
Вып. 37 **Г. Е. Шилов.** Простая гамма (устройство музыкальиой шкалы).
Вып. 38 **Ю. А. Шрейдер.** Что такое расстояние?
Вып. 39. **Н. Н. Воробьев.** Признаки делимости.
Вып 40. **С. В. Фомин.** Системы счнслення.
Вып. 41. **Б. Ю. Коган.** Приложение механики к геометрии.
Вып 42. **Ю. И. Любич и Л. А. Шор.** Кинематический метод в геометрических задачах.
Вып. 43 **В. А. Успенский.** Треугольник Паскаля.
Вып. 44 **И. Я. Бакельман.** Инверсия.
Вып. 45. **И. М. Яглом.** Необыкновеииая алгебра.
Вып. 46. **И. М. Соболь.** Метод Монте-Карло.
Вып. 47. **Л. А. Калужнин.** Основная теорема арифметики.
Вып 48. **А. С. Солодовников.** Системы линейных нерааенств.
Вып. 49 **Г. Е. Шилов.** Математический анализ в области рациональных функций.
Вып. 50 **В. Г. Болтянскнй, И. Ц. Гохберг.** Разбиение фигур на меньшие части.
Вып. 51 **Н. М. Бескин.** Изображения пространственных фигур.
Вып 52. **Н. М. Бескин.** Деленне отрезка в данном отношении.
Вып 53. **Б. А. Розенфельд и Н. Д. Сергеева.** Стереографическая проекция.
Вып. 54. **В. А. Успенский.** Машнна Поста.
Вып. 55. **Л. Беран.** Упорядоченные множества.
Вып. 56. **С. А. Абрамов.** Элементы программнрования.
Вып. 57. **В. А. Успенский.** Теорема Гёделя о неполноте.
Вып. 58. **Ю. А. Шашкин.** Эйлерова характеристика.
Вып 59. **Л. А. Скорняков.** Системы линейных уравнений.